

LÖSUNGSVORSCHLAG THEORETISCHE PHYSIK A

SECHSTES ÜBUNGSBLATT

Prof. Dr. Schön und Dr. Eschrig

Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 22

4 Punkte

a.)

Die Betragsfunktion ist definiert als:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Betrachtet man die beiden Zweige für $x \geq 0$ ($f(x)$) und $x < 0$ ($g(x)$) getrennt und lässt jeweils den anderen Zweig außer acht, so findet man:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x \cdot \theta(x)$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = -x \cdot \theta(-x)$$

Durch Addition von $f(x)$ und $g(x)$ erhält man schließlich $|x|$, die wir nun schreiben können als:

$$|x| = x \cdot \theta(x) - x \cdot \theta(-x)$$

1 Punkt

b.)

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\theta(x)}{dx} \cdot f(x) dx &= \theta(x) \cdot f(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \theta(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} dx = \\ &= \theta(x_2) \cdot f(x_2) - \theta(x_1) \cdot f(x_1) - \int_{x_1}^0 0 \cdot \frac{df(x)}{dx} dx - \int_0^{x_2} 1 \cdot \frac{df(x)}{dx} dx \stackrel{\theta(x_2)=1}{\theta(x_1)=0} \\ &= f(x_2) - 0 - \int_0^{x_2} \frac{df(x)}{dx} dx = f(x_2) - [f(x_2) - f(0)] = \boxed{f(0)} \end{aligned}$$

1 Punkt

c.)

$$\delta_L(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + \alpha^2} \right)$$

Die θ -Funktion erhält man aus der δ -Funktion durch Integration:

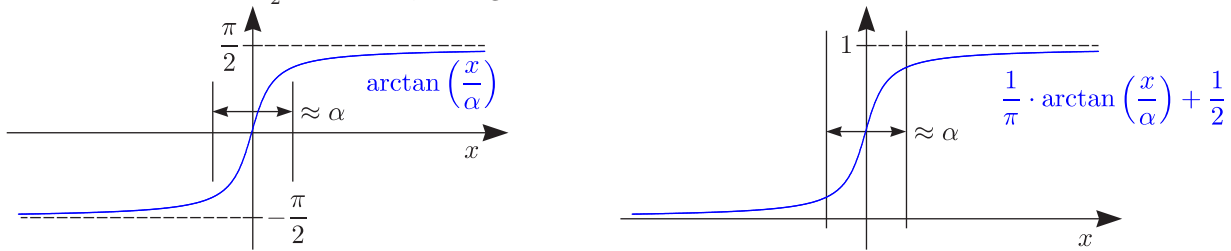
$$\theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x') dx'$$

1 Punkt

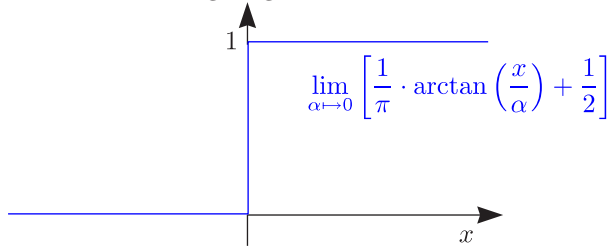
$$\theta_L(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^x \left(\frac{1}{x'^2 + \alpha^2} \right) dx' = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi} \cdot \arctan \left(\frac{x}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \right]$$

1 Punkt

Wir erinnern uns an das Schaubild der Arcustangensfunktion im linken Bild. Multipliziert man diese mit $\frac{1}{\pi}$ und verschiebt sie um $\frac{1}{2}$ nach oben, so folgt das rechte Schaubild:



Führt man nun den Grenzübergang $\alpha \mapsto 0$ durch, so resultiert hieraus die HEAVISIDESche θ -Funktion, wie oben rechnerisch gezeigt:



Aufgabe 23

9 Punkte

a.)

Aus dem dritten Übungsblatt ist bekannt:

$$\cos(n \cdot \omega \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot [\exp(i \cdot n \cdot \omega \cdot t) + \exp(-i \cdot n \cdot \omega \cdot t)]$$

0,5 Punkte

$$\sin(n \cdot \omega \cdot t) = \frac{1}{2i} \cdot [\exp(i \cdot n \cdot \omega \cdot t) - \exp(-i \cdot n \cdot \omega \cdot t)]$$

0,5 Punkte

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot [\exp(i \cdot n \cdot \omega \cdot t) + \exp(-i \cdot n \cdot \omega \cdot t)] + \frac{1}{2i} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot [\exp(i \cdot n \cdot \omega \cdot t) - \exp(-i \cdot n \cdot \omega \cdot t)] \stackrel{!}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \exp(i \cdot n \cdot \omega \cdot t)$$

1 Punkt

Wir fassen die Summanden mit $\exp(i \cdot n \cdot \omega \cdot t)$ getrennt von den Summanden mit $\exp(-i \cdot n \cdot \omega \cdot t)$ zusammen:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) \cdot \exp(i \cdot n \cdot \omega \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) \cdot \exp(-i \cdot n \cdot \omega \cdot t) \stackrel{n \mapsto -n}{=}$$

1 Punkt

$$\stackrel{n \mapsto -n}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) \cdot \exp(i \cdot n \cdot \omega \cdot t) + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{a_{-n}}{2} - \frac{b_{-n}}{2i} \right) \cdot \exp(i \cdot n \cdot \omega \cdot t)$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (a_n - ib_n) & \text{für } n > 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (a_{-n} + ib_{-n}) & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

1 Punkt

b.)

Es ist folgendes zu zeigen:

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot n \cdot t) dt$$

Zum Beweis benutzen wir die in Aufgabe 16 angegebenen a_n und b_n .

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(\omega \cdot n \cdot t) dt \text{ und } b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) dt$$

Zu unterscheiden sind die Fälle mit $n > 0$ und $n < 0$:

☞ Fall ①: $n > 0$

$$c_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot [\cos(n \cdot \omega \cdot t) - i \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)] dt = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \exp(-i \cdot n \cdot \omega \cdot t) dt \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

☞ Fall ②: $n < 0$

$$c_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot [\cos(-n \cdot \omega \cdot t) + i \cdot \sin(-n \cdot \omega \cdot t)] dt = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \exp(-i \cdot n \cdot \omega \cdot t) dt \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

Bemerkung:

Das Integral $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$ kann auch durch $\int_0^T$ ersetzt werden, fa $f(t)$ periodisch ist.

c.)

Die komplexe FOURIER-Reihe ist gegeben durch:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \exp\left(i \cdot n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = \frac{T}{2\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2\pi}{T}\right)}_{\Delta\Omega} \cdot \underbrace{c\left(\frac{2 \cdot n \cdot \pi}{T}\right)}_{\Omega} \cdot \exp\left(i \cdot n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \stackrel{T \mapsto \infty}{=} \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

$$\stackrel{T \mapsto \infty}{=} \frac{T}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega c(\Omega) \cdot \exp(i \cdot \Omega \cdot t)$$

Weiterhin folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \underbrace{T \cdot c(\Omega)}_{\tilde{f}(\Omega)} \cdot \exp(i \cdot \Omega \cdot t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \tilde{f}(\Omega) \cdot \exp(i \cdot \Omega \cdot t) \Rightarrow \boxed{\tilde{f}(\Omega) = T \cdot c(\Omega)} \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

Wir bestimmen außerdem die inverse Transformation durch:

$$T \cdot c_n = T \cdot \left[\frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \exp\left(-i \cdot n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt \right] \xrightarrow{T \mapsto \infty} \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-i \cdot \Omega \cdot t) dt = \tilde{f}(\Omega)} \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

Aufgabe 24

7 Punkte

Der Resonanzfall tritt ein für $\omega_c = \omega_0$. Die Lösung des getriebenen Oszillators im unterdämpften Falle ergibt sich aus der Vorlesung durch $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, wobei:

$$x_h(t) = a \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \cos(\Omega \cdot t + \alpha) \text{ mit } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

und

$$x_p(t) = \frac{f \cdot \cos(\omega_c \cdot t + \varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_c^2)^2 + (2\gamma\omega_c)^2}} \text{ mit } \tan(\varphi) = \frac{2\gamma\omega_c}{\omega_c^2 - \omega_0^2}$$

a.)

Da Resonanz auftritt, gilt $\omega_0 = \omega_c$ und $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

$$\cos(\omega_c \cdot t + \varphi) = \cos\left(\omega_c \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega_c \cdot t\right) = \sin(\omega_c \cdot t), \quad x_p(t) = \frac{f \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)}{2\gamma\omega_0}$$

Mittels der Anfangsbedingungen ergeben sich folgende Gleichungen für a und α :

$$x(0) = a \cdot \cos(\alpha) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\dot{x}(0) = -a \cdot \gamma \cdot \cos(\alpha) - a \cdot \Omega \cdot \sin(\alpha) + \frac{f}{2\gamma} \stackrel{!}{=} 0$$

Aus der ersten Gleichung resultiert die Bedingung $\cos(\alpha) = 0$ und damit:

$$\boxed{\alpha = +\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \cos\left(\Omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\Omega \cdot t)$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit γ und Addition der zweiten Gleichung erhalten wir:

$$a \cdot \sin(\alpha) = \frac{f}{2 \cdot \gamma \cdot \Omega} \xrightarrow{\sin(\alpha)=+1} \boxed{a = \frac{f}{2 \cdot \gamma \cdot \Omega}}$$

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen:

$$\boxed{x_h(t) = -\frac{f}{2 \cdot \gamma \cdot \Omega} \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \sin(\Omega \cdot t) \text{ mit } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

1 Punkt

$$\boxed{x_p(t) = \frac{f}{2 \cdot \gamma \cdot \omega_0} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)}$$

1 Punkt

Die Gesamtlösung folgt durch Addition der homogenen und partikulären Lösung, also $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.

b.)

Speziell für $f = \sqrt{2} \cdot \omega_0^2$ und $\omega_0 = \sqrt{2} \cdot \gamma$ ergibt sich:

$$\Omega = \sqrt{2 \cdot \gamma^2 - \gamma^2} = \boxed{\gamma}, \quad \frac{f}{2 \cdot \gamma \cdot \Omega} = \frac{f}{2 \cdot \gamma^2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \omega_0^2}{2 \cdot \frac{\omega_0^2}{2}} = \boxed{\sqrt{2}}, \quad \frac{f}{2 \cdot \gamma \cdot \omega_0} = \frac{\sqrt{2} \cdot \omega_0^2}{2 \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{\sqrt{2}}\right)} = \boxed{1}$$

Daraus resultiert schlussendlich:

$$\boxed{x_h(t) = -\sqrt{2} \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \sin(\gamma \cdot t)}$$

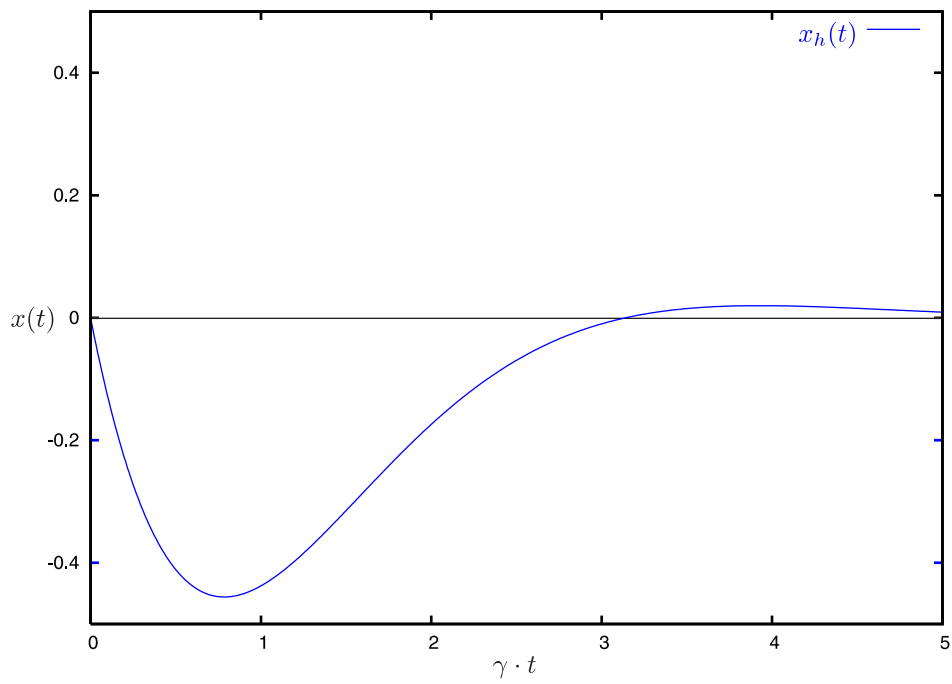
1 Punkt

$$\boxed{x_p(t) = \sin\left(\sqrt{2} \cdot \gamma \cdot t\right)}$$

1 Punkt

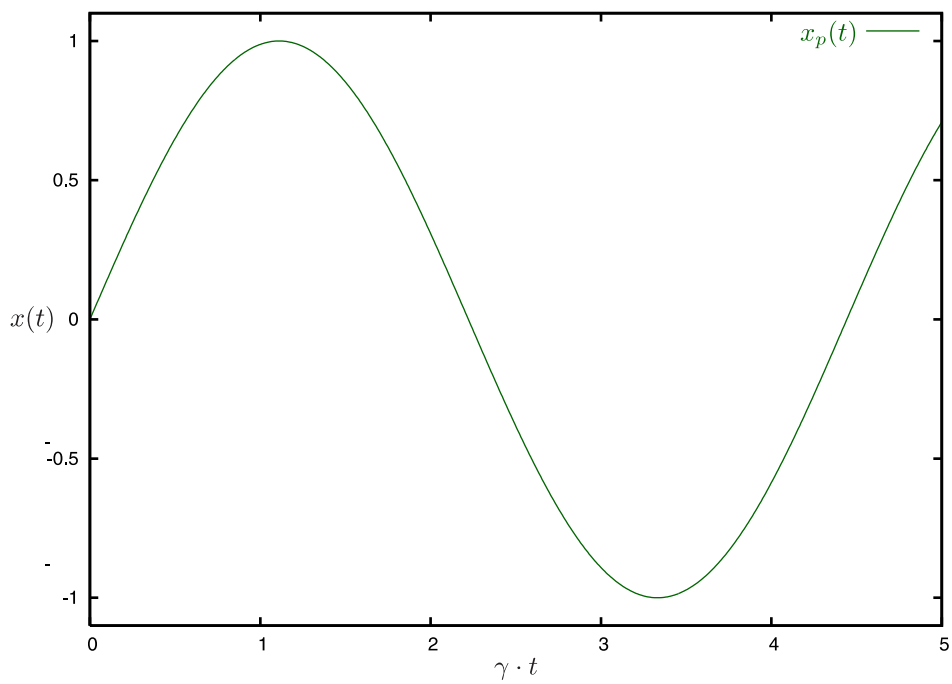
Und nun noch die drei Schaubilder:

🌀 Homogene Lösung:



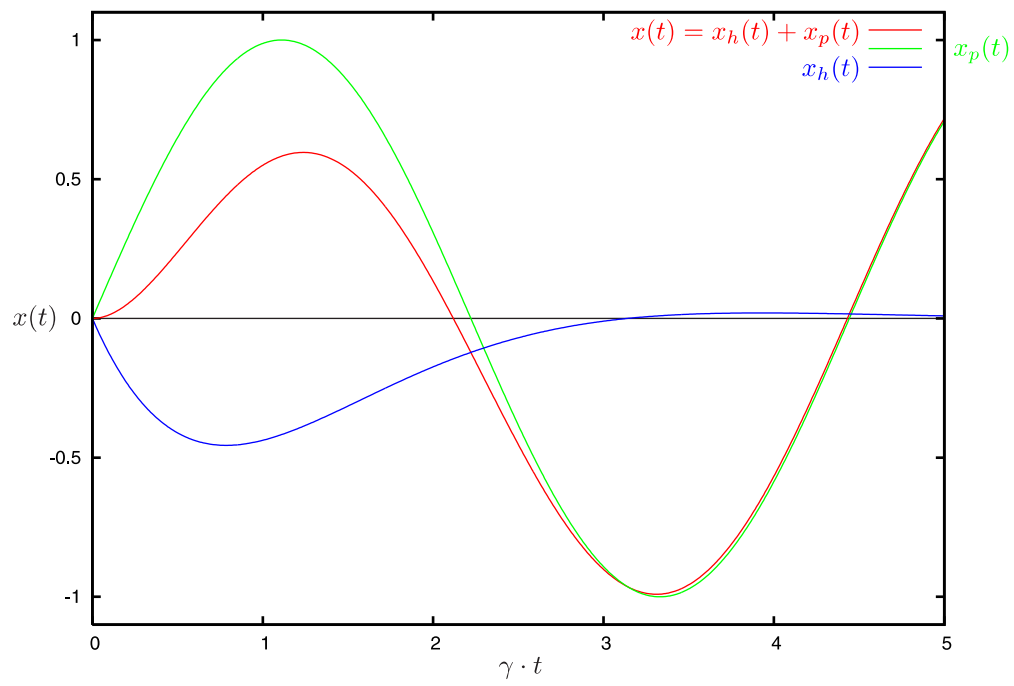
1 Punkt

☞ Inhomogene Lösung (Partikuläre Lösung):



1 Punkt

☞ Gesamtlösung (mit inhomogener und homogener Lösung):



1 Punkt