

LÖSUNGSVORSCHLAG THEORETISCHE PHYSIK A SIEBENTES ÜBUNGSBLATT

Prof. Dr. Schön und Dr. Eschrig

Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 25

4 Punkte

a.)

Zuerst berechnen wir den Imaginärteil des Ausdrucks, indem wir den Nenner reell machen:

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{\varepsilon + i|\eta|} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{\varepsilon - i|\eta|}{\varepsilon^2 + \eta^2} \right) = -\frac{|\eta|}{\varepsilon^2 + \eta^2}$$

Dabei handelt es sich nun um die LORENTZ-Funktion bis auf das negative Vorzeichen und den fehlenden Faktor $\frac{1}{\pi}$ (siehe Aufgabe 20a). Bilden wir nun den Grenzwert für $\eta \mapsto 0$, so erhalten wir die δ -Funktion mit einem zusätzlichen Faktor π , um das fehlende $\frac{1}{\pi}$ auszugleichen:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{|\eta|}{\varepsilon^2 + \eta^2} = \pi \cdot \delta(\varepsilon) \Rightarrow \lim_{\eta \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\varepsilon + i|\eta|} \right) = -\pi \cdot \delta(\varepsilon)$$

1 Punkt

b.)

Wir berechnen die FOURIER-Transformierte von $\delta(t - t')$ bezüglich t :

$$\tilde{f}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t') \cdot \exp(-i\Omega t) dt = \exp(-i\Omega t')$$

1 Punkt

c.)

$$\sum_k f(\varepsilon_k) = \sum_k \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\varepsilon - \varepsilon_k) d\varepsilon}_{=1} \cdot f(\varepsilon_k)$$

Nun können wir $f(\varepsilon_k) = f(\varepsilon)$ setzen, da aufgrund der Integration über die δ -Funktion sowieso nur Terme mit $\varepsilon = \varepsilon_k$ einen Beitrag liefern:

$$\sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \delta(\varepsilon - \varepsilon_k) \cdot f(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) \cdot \underbrace{\left[\sum_k \delta(\varepsilon - \varepsilon_k) \right]}_{\varrho(\varepsilon)} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) \varrho(\varepsilon)$$

1 Punkt

d.)

Mit dem Ergebnis aus Aufgabe 20c.) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\Omega \cdot t) \cdot \exp(-i\omega t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\Omega t) - \exp(-i\Omega t)}{2i} \cdot \exp(-i\omega t) dt = \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp[i(\Omega - \omega) \cdot t] - \exp[-i(\Omega + \omega) \cdot t]) dt = \\ &= \frac{1}{2i} \cdot 2\pi \cdot [\delta(\Omega - \omega) - \delta(\Omega + \omega)] = \boxed{-i\pi \cdot [\delta(\Omega - \omega) - \delta(\Omega + \omega)]} \end{aligned}$$

1 Punkt

Aufgabe 26

5 Punkte

a.)

Nach der Vorlesung kann die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \cdot \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) x(t) = f(t)$$

durch FOURIER-Transformation auf die Form

$$(-\omega^2 + 2i \cdot \gamma \cdot \omega + \omega_0^2) \tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega)$$

gebracht werden. Dabei handelt es sich um eine algebraische Gleichung, in der die FOURIER-Transformierten $\tilde{x}(\omega)$ und $\tilde{f}(\omega)$ der Funktionen $x(t)$ und $f(t)$ vorkommen. Diese algebraische Gleichung kann nun problemlos nach $\tilde{x}(\omega)$ aufgelöst werden:

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2}$$

Wir benötigen also noch speziell für unsere Aufgabe hier die FOURIER-Transformierte von $f(t) = \delta(t)$, also

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot \exp(-i\omega t) dt = 1$$

womit sich ergibt:

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2}$$

1 Punkt

b.)

Um nun $x(t)$ zu erhalten, müssen wir $\tilde{x}(\omega)$ mittels der inversen FOURIER-Transformation wieder zurücktransformieren. Das Integral lösen wir durch Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\exp(i\omega t)}{-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\exp(i\omega t)}{2\Omega} \cdot \left[\frac{1}{\omega - (-\Omega + i\gamma)} - \frac{1}{\omega - (\Omega + i\gamma)} \right] \text{ mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \end{aligned}$$

1 Punkt

Weiterhin verwenden wir die angegebene Formel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\exp(i\omega t)}{\omega - z} = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ \exp(izt) & \text{falls } t > 0 \end{cases} \quad \text{und } \text{Im}(z) > 0$$

In unserem Falle ist $z = \pm\Omega + i\gamma$. Da der Dämpfungsfaktor $\gamma > 0$ ist, gilt auf jedem Fall $\text{Im}(z) > 0$, womit weiter folgt:

$$\begin{aligned} x(t) &= \theta(t) \cdot \frac{i}{2\Omega} \cdot [\exp(i \cdot (-\Omega + i\gamma) \cdot t) - \exp(i \cdot (\Omega + i\gamma) \cdot t)] = \\ &= \theta(t) \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \left[\frac{\exp(i\Omega t) - \exp(-i\Omega t)}{2i} \right] \cdot \frac{1}{\Omega} = \theta(t) \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \frac{\sin(\Omega \cdot t)}{\Omega} \end{aligned}$$

2 Punkte

c.)

Aus $\omega_0 \mapsto \gamma$ ergibt sich $\Omega \mapsto 0$, womit wir die Sinusfunktion für kleine Argumente Ωt entwickeln können:

$$\sin(\Omega t) = \Omega t - \frac{1}{3!} \cdot (\Omega t)^3 + \frac{1}{5!} \cdot (\Omega t)^5 \mp \dots$$

Wir berücksichtigen nur den linearen Term Ωt und erhalten schlussendlich für diesen Fall:

$$x(t) = \theta(t) \cdot \exp(-\gamma t) \cdot t$$

1 Punkt

Aufgabe 27

6 Punkte

Die GREENSche Funktion für den unterdämpften harmonischen Oszillator lautet nach der Vorlesung:

$$G(t, t') = \theta(t - t') \cdot \frac{1}{\Omega} \cdot \exp(-\gamma \cdot (t - t')) \cdot \sin[\Omega \cdot (t - t')] \text{ mit } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

In dieser Aufgabe soll die partikuläre Lösung der Schwingungsgleichung mittels dieser GREENSchen Funktion berechnet werden, wobei die äußere Kraft $f(t)$ durch eine HEAVISIDESche Sprungfunktion mal einer Konstanten f gegeben sei, also $f(t) = f \cdot \theta(t)$:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t - t') \cdot \frac{\exp[-\gamma \cdot (t - t')]}{\Omega} \cdot \sin[\Omega \cdot (t - t')] \cdot f \cdot \theta(t') dt' = \\ &= f \cdot \frac{\theta(t)}{\Omega} \cdot \int_0^t \exp[-\gamma \cdot (t - t')] \cdot \sin[\Omega \cdot (t - t')] dt' \stackrel{\tau=t-t'}{=} -\frac{\theta(t)}{\Omega} \cdot \int_t^0 \exp(-\gamma \cdot \tau) \cdot \sin(\Omega \cdot \tau) d\tau = \\ &= f \cdot \frac{\theta(t)}{\Omega} \cdot \int_0^t \exp(-\gamma \cdot \tau) \cdot \frac{\exp(i\Omega\tau) - \exp(-i\Omega\tau)}{2i} d\tau = \frac{\theta(t)}{2i\Omega} \cdot \int_0^t (\exp[(i\Omega - \gamma) \cdot \tau] - \exp[-(i\Omega + \gamma) \cdot \tau]) d\tau = \\ &= f \cdot \frac{\theta(t)}{2i\Omega} \cdot \left(\frac{1}{i\Omega - \gamma} \cdot [\exp[(i\Omega - \gamma) \cdot t] - 1] + \frac{1}{i\Omega + \gamma} \cdot [\exp[-(i\Omega + \gamma) \cdot t] - 1] \right) = \\ &= f \cdot \frac{\theta(t)}{2i\Omega} \cdot \left[\exp(-\gamma \cdot t) \cdot \left(\frac{\exp(i\Omega t)}{i\Omega - \gamma} + \frac{\exp(-i\Omega t)}{i\Omega + \gamma} \right) - \left(\frac{1}{i\Omega - \gamma} + \frac{1}{i\Omega + \gamma} \right) \right] = \\ &= f \cdot \frac{\theta(t)}{2i\Omega} \cdot \left[\exp(-\gamma \cdot t) \cdot \left(\frac{i\Omega \cdot [\exp(i\Omega t) + \exp(-i\Omega t)] + \gamma \cdot [\exp(i\Omega t) - \exp(-i\Omega t)]}{-\Omega^2 - \gamma^2} \right) - \left(\frac{2i\Omega}{-\Omega^2 - \gamma^2} \right) \right] = \\ &= f \cdot \frac{\theta(t)}{\Omega^2 + \gamma^2} \cdot \frac{1}{\Omega} \cdot (-\exp(-\gamma \cdot t) \cdot [\Omega \cdot \cos(\Omega t) + \gamma \cdot \sin(\Omega t)] + \Omega) \end{aligned}$$

Die $\theta(t)$ -Funktion vor dem restlichen Term kommt von der Bedingung $0 < t' < t$, welche natürlich auch $t > 0$ beinhaltet. Dies ist auch physikalisch klar, denn für $t < 0$ ist die äußere Kraft gleich 0. Nach dieser langen Rechnung erhalten wir also schließlich:

$$x_p(t) = f \cdot \frac{\theta(t)}{\Omega^2 + \gamma^2} \cdot \left[1 - \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \left(\cos(\Omega \cdot t) + \frac{\gamma}{\Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot t) \right) \right] \quad \text{4 Punkte}$$

Des weiteren berechnen wir $\dot{x}_p(t)$, indem wir $x(t)$ mit Hilfe der Produktregel nach der Zeit t ableiten und beachten, dass die Ableitung der θ -Funktion die δ -Funktion ist. Außerdem verwenden wir, dass für eine glatte Funktion $g(x)$ gilt: $g(x) \cdot \delta(x - x_0) = g(x_0) \cdot \delta(x - x_0)$.

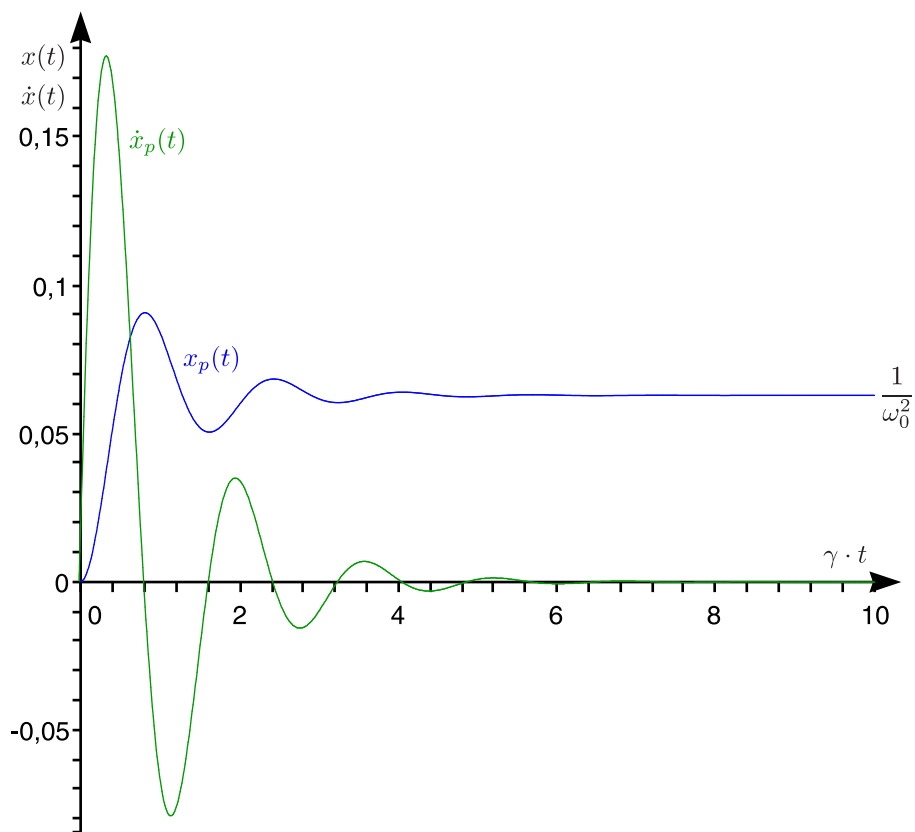
$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= f \cdot \underbrace{\delta(t) \cdot \left[1 - \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \left(\cos(\Omega \cdot t) + \frac{\gamma}{\Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot t) \right) \right]}_{=0} \cdot \frac{1}{\Omega^2 + \gamma^2} + \\ &\quad + f \cdot \frac{\theta(t)}{\Omega^2 + \gamma^2} \cdot \left[\gamma \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \left(\cos(\Omega t) - \frac{\gamma}{\Omega} \cdot \sin(\Omega t) \right) - \Omega \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \left(-\sin(\Omega t) + \frac{\gamma}{\Omega} \cdot \cos(\Omega t) \right) \right] = \\ &= \frac{f \cdot \theta(t) \cdot \exp(-\gamma \cdot t)}{\Omega^2 + \gamma^2} \cdot \left[\gamma \cdot \cos(\Omega t) + \frac{\gamma^2}{\Omega} \cdot \sin(\Omega t) + \Omega \cdot \sin(\Omega t) - \gamma \cdot \cos(\Omega t) \right] = \\ &= \frac{f \cdot \theta(t)}{\Omega^2 + \gamma^2} \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \sin(\Omega t) \cdot \frac{\Omega^2 + \gamma^2}{\Omega} \end{aligned}$$

Es ergibt sich also:

$$\dot{x}_p(t) = f \cdot \theta(t) \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \frac{\sin(\Omega \cdot t)}{\Omega} \quad \text{1 Punkt}$$

(Bemerkung: $\Omega^2 + \gamma^2 = \omega_0^2$)

Außerdem zeichnen wir die Funktionen $x(t)$ und $\dot{x}(t)$, wobei $\omega_0 = 4\gamma$ (und außerdem $f = 1$) sei:



1 Punkt