# 8. Übung zur Vorlesung Theoretische Physik A
# Universität Karlsruhe WS 2004/05

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/

Vorrechnen: Freitag, 14.01.2005

Hinweis: Die erste Klausur zur Vorlesung findet am Freitag, den 17.12.2004 15:00-17:00 Uhr im Gerthsen-Hörsaal statt. Als Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes A4-Blatt zugelassen. Die Rückgabe der Klausur findet am 22. 12.04 von 15:00-16:00 im im Raum 3.1 statt. Die Besprechung der Klausur findet am 07.01.2005 in den Tutorien statt.

**Aufgabe 28** (5 Punkte)

Faltungssatz für Fouriertransformation:
Die Faltung der Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ist durch folgendes Integral definiert:

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' \; f_1(x')f_2(x-x') \; . \tag{1}$$

**a)** Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte des Produktes $f_1(x)f_2(x)$ die Faltung $\frac{1}{2\pi}\tilde{f}_1(k)*\tilde{f}_2(k)$ ist. Hinweis: Hierfür ist die Identität $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{ikx} = 2\pi\delta(k)$ nützlich. (2 Punkte)

**b)** Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte der Faltung $f_1(x) * f_2(x)$ das Produkt $\tilde{f}_1(k)\tilde{f}_2(k)$ ist. (1 Punkt)

**c)** Beweisen Sie die Parsevalsche Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} |\tilde{f}(k)|^2 \; . \tag{2}$$

Hinweis: Verwenden Sie $f_2(x) = f_1^*(-x) = f(x)$ und zeigen Sie, dass dann $\tilde{f}_2(k) = \tilde{f}_1^*(k)$ ist. Benutzen Sie dann das Ergebnis aus a) mit $x = 0$. (2 Punkte)

**Aufgabe 29** (6 Punkte)

Drude-Leitfähigkeit:
In der Drude-Theorie der Leitfähigkeit für Metalle erfüllt die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Elektrons (Masse $m$, Ladung $e$) folgende Differentialgleichung:

$$m\dot{v}(t) + m\frac{v(t)}{\tau} = eE(t) \tag{3}$$

Hierbei ist $\tau$ die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen des Elektrons an Störstellen im Metall und $E(t)$ ist das äußere elektrische Feld. Die Stromdichte ist durch $j(t) = nev(t)$ gegeben (wobei $n$ die Elektronendichte darstellt). Durch Fouriertransformation ergibt sich dann die Beziehung

$$\tilde{j}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega)\tilde{E}(\omega) \; , \tag{4}$$

wobei $\tilde{j}(\omega)$ und $\tilde{E}(\omega)$ die Fouriertransformierten der Stromdichte und des elektrischen Feldes sind, und $\tilde{\sigma}(\omega)$ die frequenzabhängige Leitfähigkeit darstellt.

**a)** Berechnen Sie $\tilde{\sigma}(\omega)$ sowie die Gleichstromleitfähigkeit $\sigma_0 = \tilde{\sigma}(\omega = 0)$. (4 Punkte)

**b)** Berechnen Sie $j(t)$ für den Fall $eE(t) = \delta(t)$. Verwenden Sie dazu das Integral von Aufgabe 26b). (2 Punkte)

**Aufgabe 30** (4 Punkte)

Integration der Bewegungsgleichung mit Hilfe der Energieerhaltung:

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass die Erhaltung der Energie

$$E = \frac{m}{2}\,\dot{x}^2 + U(x) = \text{const}\ ; \quad E \geq U(x) \tag{5}$$

zur Integration der Bewegungsgleichung herangezogen werden kann:

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x'\ \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x'))}}\ . \tag{6}$$

Berechnen Sie auf diese Weise $x(t)$ für das Potential $U(x) = -\frac{k}{2}x^2$ für die Anfangswerte $x(t = 0) = 0$, $v(t = 0) = v_0$. Skizzieren Sie $x(t)$.
Hinweis:

$$\int_0^x \mathrm{d}x'\ \frac{1}{\sqrt{x'^2 + 1}} = \operatorname{arcsinh}(x) \tag{7}$$