

LÖSUNGSVORSCHLAG THEORETISCHE PHYSIK A ACHTES ÜBUNGSBLATT

Prof. Dr. Schön und Dr. Eschrig

Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 28

5 Punkte

Die Faltung zweier Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ist definiert als:

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x') \cdot f_2(x - x') dx'$$

a.)

Wir berechnen die FOURIER-Transformierte $\mathcal{F}$ des Produktes $f_1(x) \cdot f_2(x)$, wobei wir für $f_1(x)$ und $f_2(x)$ jeweils deren FOURIER-Transformierten einsetzen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f_1(x)f_2(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \exp(-ikx) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \tilde{f}_1(k_1) \cdot \exp(ik_1x) \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_2}{2\pi} \tilde{f}_2(k_2) \cdot \exp(ik_2x) \right) \cdot \exp(-ikx) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} \tilde{f}_1(k_1) \cdot \tilde{f}_2(k_2) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(k_1 + k_2 - k) \cdot x] dx}_{2\pi \cdot \delta(k_1 + k_2 - k)} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1 dk_2}{2\pi} \tilde{f}_1(k_1) \cdot \tilde{f}_2(k_2) \cdot \delta(k_1 + k_2 - k) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \tilde{f}_1(k_1) \cdot \tilde{f}_2(k - k_1) = \boxed{\frac{1}{2\pi} \cdot \tilde{f}_1(k) * \tilde{f}_2(k)} \end{aligned}$$

2 Punkte

b.)

Hier berechnen wir nun umgekehrt die FOURIER-Transformierte der Faltung:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f_1(x) * f_2(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) * f_2(x) \cdot \exp(-ikx) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x') \cdot f_2(x - x') dx' \right] \cdot \exp(-ikx) \quad \begin{matrix} x-x'=x_2 \\ x' \equiv x_1 \end{matrix} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 f_2(x_2) \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 f_1(x_1) \cdot \exp[-ik(x_2 + x_1)] = \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2) \cdot \exp(-ikx_2) dx_2 \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) \cdot \exp(-ikx_1) dx_1 \right] = \boxed{\tilde{f}_2(k) \cdot \tilde{f}_1(k)} \end{aligned}$$

Hierfür gibt es 1 Punkt.

c.)

Nach dem gegebenen Hinweis ist $f_2(x) = f_1^*(-x)$, womit sich ergibt:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_2(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) \cdot \exp(-ikx) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(-x) \cdot \exp(-ikx) dx \stackrel{x'=-x}{=} - \int_{+\infty}^{-\infty} f_1^*(x') \cdot \exp(ikx') dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(x') \cdot \exp(ikx') dx' = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x') \cdot \exp(-ikx') dx' \right]^* = \tilde{f}_1^*(k)\end{aligned}$$

1 Punkt

Wir nutzen nun aus, dass die FOURIER-Transformierte von $\tilde{f}_1(k) \cdot \tilde{f}_2(k)$ die Faltung $f_1(x) * f_2(x)$ ist:

$$\begin{aligned}\left. \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x') \cdot f_2(x-x') dx' \right|_{x=0} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x') \cdot f_1^*(x') dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x')|^2 dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}_1(k) \cdot \tilde{f}_2(k) \cdot \exp(ikx) \bigg|_{x=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}_1(k) \cdot \tilde{f}_1^*(k) \cdot \exp(ikx) \bigg|_{x=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} |\tilde{f}_1(k)|^2\end{aligned}$$

1 Punkt

Damit ist das PARSEVALSche Theorem gezeigt.

Aufgabe 29

6 Punkte

Wir gehen aus von folgender Differentialgleichung:

$$m \cdot \dot{v}(t) + m \cdot \frac{v(t)}{\tau} = e \cdot E(t)$$

a.)

Durch FOURIER-Transformation geht diese Gleichung über in

$$i\omega \cdot \tilde{v}(\omega) + \frac{\tilde{v}(\omega)}{\tau} = \frac{e}{m} \cdot \tilde{E}(\omega)$$

wobei $\tilde{v}(\omega)$ und $\tilde{E}(\omega)$ die FOURIER-Transformierten der Funktionen $v(t)$ und $E(t)$ sind. Diese algebraische Gleichung können wir nun nach $\tilde{v}(\omega)$ auflösen:

$$\tilde{v}(\omega) = \frac{\frac{e}{m} \cdot \tilde{E}(\omega)}{i\omega + \frac{1}{\tau}}$$

1 Punkt

Damit ergibt sich auch die FOURIER-Transformierte des Stromes $j(t)$:

$$\tilde{j}(\omega) = n \cdot e \cdot \tilde{v}(\omega) = \frac{n \cdot e^2}{m} \cdot \frac{1}{i\omega + \frac{1}{\tau}} \cdot \tilde{E}(\omega)$$

1 Punkt

Durch Vergleich mit $\tilde{j}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) \cdot \tilde{E}(\omega)$ erhalten wir die FOURIER-Transformierte der Leitfähigkeit $\sigma(t)$:

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \frac{n \cdot e^2}{m} \cdot \frac{1}{i\omega + \frac{1}{\tau}}$$

1 Punkt

$$\tilde{\sigma}(\omega = 0) = \frac{n \cdot e^2 \cdot \tau}{m}$$

1 Punkt

b.)

Führen wir die FOURIER-Transformation von $e \cdot E(t) = \delta(t)$ durch, so erhalten wir $e \cdot \tilde{E}(\omega) = 1$, da die FOURIER-Transformierte der δ -Funktion gleich 1 ist. Damit können wir die FOURIER-Transformierte des Stromes umschreiben:

$$\tilde{j}(\omega) = \frac{n \cdot e}{m} \cdot \frac{1}{i\omega + \frac{1}{\tau}}$$

1 Punkt

Durch Rücktransformation folgt $j(t)$, wobei wir das Integral analog zu Aufgabe 26b.) berechnen können:

$$j(t) = \frac{n \cdot e}{m} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega - \frac{i}{\tau}} \cdot \exp(i\omega t) = \boxed{\frac{n \cdot e}{m} \cdot \theta(t) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

1 Punkt

Aufgabe 30

4 Punkte

Wir führen die Integrationen unter Verwendung der Anfangsbedingung $x(t=0) = 0$ aus:

$$\begin{aligned} t &= \int_0^x dx' \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E + \frac{1}{2} k x'^2)}} \stackrel{a^2 = \frac{2E}{k}}{=} \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \int_0^x dx' \frac{1}{\sqrt{x'^2 + a^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \int_0^x dx' \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + 1}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

2 Punkte

Wir lösen nach $x(t)$ auf:

$$x(t) = a \cdot \sinh\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cdot \sinh\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

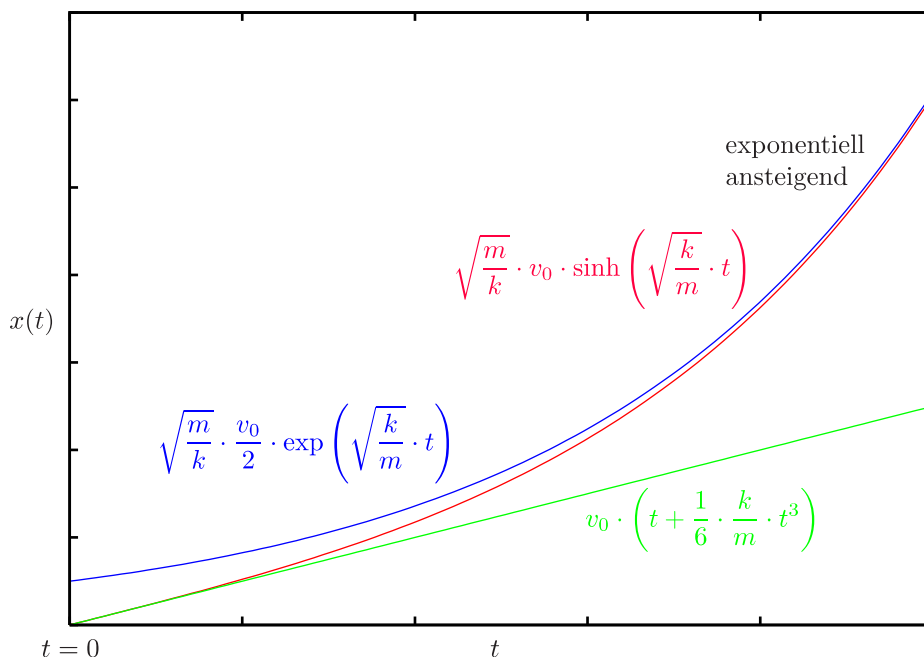
Die Anfangsbedingung $x(t=0) = 0$ besagt, dass zur Zeit $t=0$ auch die potentielle Energie E_{pot} gleich 0 ist. Damit besteht die Gesamtenergie nur aus der kinetischen Energie:

$$E = E_{kin} = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Damit können wir noch $x(t)$ durch v_0 ausdrücken:

$$x(t) = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot v_0 \cdot \sinh\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

1 Punkt



1 Punkt