9. Übung zur Vorlesung Theoretische Physik A
Universität Karlsruhe WS 2004/05

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/
Vorrechnen: Freitag, 21.01.2005

Aufgabe 31 Ball in einem quartischen Potential: (5 Punkte)

Ein Ball rollt zwischen den beiden Maxima (bei $\pm x_1$) eines quartischen Potentials, $U(x) = bx^2 - cx^4$, mit $b, c > 0$. Wir wollen die Bewegungsgleichung unter Verwendung des Energieerhaltungssatzes integrieren.

a) Finden Sie zunächst allgemein das Integral der Bewegungsgleichung in der Form $t = \ldots$, wie in der Vorlesung behandelt (das Integral braucht noch nicht gelöst zu werden). (1 Punkt)

b) Betrachten Sie nun den Spezialfall $E = U(x_1)$ (d.h. die Gesammtenergie entspricht der Energie eines am Maximum des Potentials ruhenden Teilchens). Zeigen Sie dass dann die Lösung der Bewegungsgleichung mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ (wobei $-x_1 < x_0 < 0$), wie folgt lautet:

$$x(t) = x_1 \tanh\left[x_1\sqrt{2c/m}\,t + \mathrm{Artanh}(x_0/x_1)\right] \ . \tag{1}$$

(2 Punkte)

c) Bestimmen und skizzieren Sie die Zeit t_0, die der Ball braucht, um das Minimum zu erreichen (d.h. $x(t_0) = 0$), als Funktion von x_0. (1 Punkt)

d) Skizzieren Sie die Funktion $x(t)$ für den Fall $x_0 \to -x_1$ (aber $x_0 \neq -x_1$), unter Berücksichtigung des Ergebnisses von (c). (1 Punkt)

Aufgabe 32 Zylinderkoordinaten: (3 Punkte)

Die Beziehung zwischen Cartesischen und Zylinderkoordinaten ist wie folgt definiert: $(x, y, z) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)$. Die zylindrischen Einheitsvektoren sind folgendermaßen definiert:

$$\hat{e}_\rho = \hat{e}_x \cos\phi + \hat{e}_y \sin\phi, \qquad \hat{e}_\phi = -\hat{e}_x \sin\phi + \hat{e}_y \cos\phi, \qquad \hat{e}_z = \hat{e}_z \ . \tag{2}$$

a) Zeichnen Sie die zylindrischen Einheitsvektoren $\hat{e}_\rho$ und $\hat{e}_\phi$ in der $x-y$-Ebene. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass $\hat{e}_\rho\cdot\hat{e}_\rho = \hat{e}_\phi\cdot\hat{e}_\phi = \hat{e}_z\cdot\hat{e}_z = 1$, und $\hat{e}_\rho\cdot\hat{e}_\phi = \hat{e}_\phi\cdot\hat{e}_z = \hat{e}_z\cdot\hat{e}_\rho = 0$, wie es sich für orthonormale Einheitsvektoren gehört. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie durch Ableitung von Gl. (2) nach der Zeit t, dass

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_\rho = \dot{\hat{e}}_\rho = \hat{e}_\phi\dot{\phi}\ , \qquad \frac{d}{dt}\hat{e}_\phi = \dot{\hat{e}}_\phi = -\hat{e}_\rho\dot{\phi}\ . \tag{3}$$

(1 Punkt)

Aufgabe 33 Stöße: (3 Punkte)

a) Ein Proton mit Energie E_1 stösst elastisch auf ein zweites, ruhendes Proton. Nach dem Stoß fliegt das erste Proton in einem Winkel von $\theta_1 = 30^\circ$ relativ zu seiner ursprünglichen Bewegungsrichtung weiter. Was ist die Richtung θ_2 des anderen Protons? Was sind die Endenergien E_1' und E_2' der beiden Protonen? (2 Punkte)

b) Ein Proton und ein Neutron (gleicher Masse m) fliegen mit Geschwindigkeiten von v_1 bzw. v_2 und einem relativen Winkel aufeinander zu. Der Stoß ist inelastisch, die beiden Teilchen bleiben aneinander hängen und bilden ein sogenanntes Deuteron-Ion. Finden Sie die Richtung θ_1 des Deuteron-Ions nach dem Stoß. (1 Punkt)

Aufgabe 34 Wegintegrale: (4 Punkte)

a) Schreiben Sie die Kraft $\vec{F} = \vec{r} \times \vec{a}$ ($\vec{a}$ ist ein konstanter Vektor) explizit in Cartesischen und Zylinderkoordinaten. (Notation: $\vec{r} = \hat{e}_x x + \hat{e}_y y + \hat{e}_z z = \hat{e}_\rho \rho + \hat{e}_z z$;
$\vec{a} = \hat{e}_x a_x + \hat{e}_y a_y + \hat{e}_z a_z = \hat{e}_\rho a_\rho + \hat{e}_\phi a_\phi + \hat{e}_z a_z$, mit den Koeffizienten a_x, a_y, a_z konstant.) (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass das Wegintegral $I = \int d\vec{r} \cdot \vec{F}$, für einen kreisförmigen Weg mit Radius ρ in der x-y Fläche (d.h. bei $z = 0$) das Ergebnis $I = -2\pi\rho^2 a_z$ liefert. *Hinweis:* Benutzen Sie Zylinderkoordinaten, da dann für diesen Weg $d\vec{r} = \hat{e}_\phi \, \rho \, d\phi$ gilt. (1 Punkt)

c) Das Stokessche Theorem besagt, dass obiges Wegintegral auch als Flächenintegral über die durch den Weg eingeschlossene Fläche A_0 ausgedrückt werden kann: $\int d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{A_0} dA \, \hat{e}_z \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{F})$. Reproduzieren Sie (unter Benutzung Cartesischer Koordinaten) hiermit das Ergebnis von (b). (1 Punkt)

d) Ist $\vec{F}$ konservativ? (1 Punkt)