

LÖSUNGSVORSCHLAG THEORETISCHE PHYSIK A

NEUNTES ÜBUNGSBLATT

Prof. Dr. Schön und Dr. Eschrig

Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 31

a.)

Durch Trennung der Veränderlichen und anschließende Integration ergibt sich aus der Energieerhaltung:

$$t = \int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E - U(x'))}} dx' = \int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot \sqrt{E - b \cdot x'^2 + c \cdot x'^4}}} dx' \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

b.)

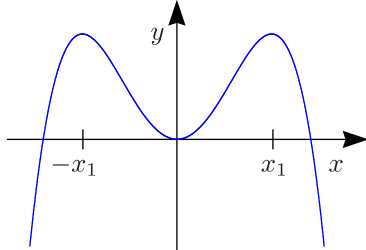
Das gegebene Potential lautet $U(x) = b \cdot x^2 - c \cdot x^4$ mit $b, c > 0$. Die Extrema erhalten wir, indem wir die erste Ableitung nach x gleich null setzen und nach x auflösen:

$$\frac{d}{dx} U(x) = 2b \cdot x - 4c \cdot x^3 \stackrel{!}{=} 0$$

Die Maxima liegen bei:

$$\boxed{\pm x_1 \text{ mit } x_1 = \sqrt{\frac{b}{2c}}}$$

Das Potential sieht folgendermaßen aus:



Wir nehmen an, dass die Gesamtenergie E des Teilchens der potentiellen Energie am Maximum des Potentials bei x_1 entspricht:

$$E = U(x_1) = b \cdot x_1^2 - c \cdot x_1^4 = \frac{b^2}{2c} - \frac{b^2}{4c} = \boxed{\frac{b^2}{4c}}$$

Damit folgt weiter:

$$E - U(x) = \frac{b^2}{4c} - b \cdot x^2 + c \cdot x^4 = c \cdot \left(\frac{b}{2c} - x^2 \right)^2 = c \cdot (x_1^2 - x^2)^2$$

Somit erhalten wir, indem obige Integration ausgeführt wird:

$$t = \int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{\frac{2c}{m} \cdot (x_1^2 - x'^2)}} dx' = \sqrt{\frac{m}{2c}} \cdot \frac{1}{x_1} \cdot \left[\operatorname{artanh} \left(\frac{x}{x_1} \right) - \operatorname{artanh} \left(\frac{x_0}{x_1} \right) \right] \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

Wir lösen das ganze noch nach x auf und erhalten damit $x(t)$:

$$\boxed{x(t) = x_1 \cdot \tanh \left[x_1 \cdot \sqrt{\frac{2c}{m}} \cdot t + \operatorname{artanh} \left(\frac{x_0}{x_1} \right) \right]} \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

c.)

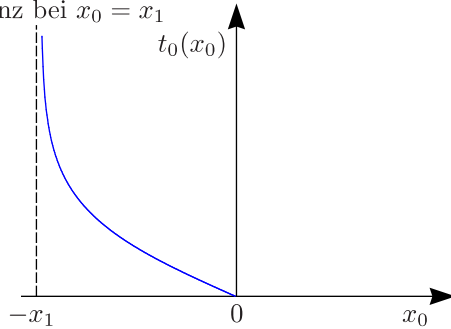
Damit die Bedingung $x(t_0) = 0$ erfüllt ist, muss das Argument des Tangenshyperbolicus gleich null sein:

$$x_1 \cdot \sqrt{\frac{2c}{m}} \cdot t_0 + \operatorname{artanh}\left(\frac{x_0}{x_1}\right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow t_0 = -\frac{1}{x_1} \cdot \sqrt{\frac{m}{2c}} \cdot \operatorname{artanh}\left(\frac{x_0}{x_1}\right)$$

0,5 Punkte

Wir zeichnen das Schaubild der Funktion $t_0(x_0)$:

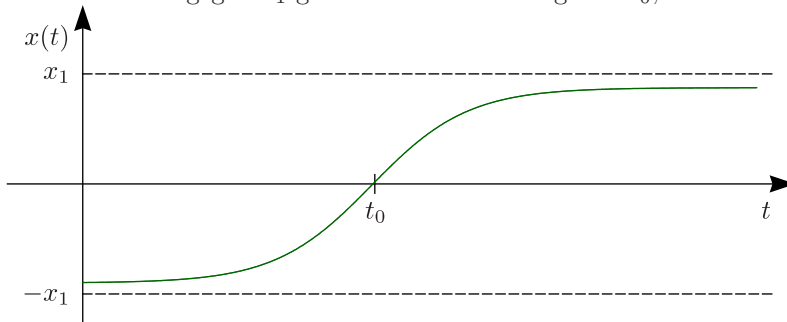
Divergenz bei $x_0 = x_1$



0,5 Punkte

d.)

Es handelt sich um einen Tangenshyperbolicus (siehe Aufgabe 5), der für $t \mapsto -\infty$ asymptotisch gegen $-x_1$ und für $t \mapsto \infty$ gegen x_1 geht. Die Nullstelle liegt bei t_0 , das im vorherigen Aufgabenteil berechnet wurde.



1 Punkt

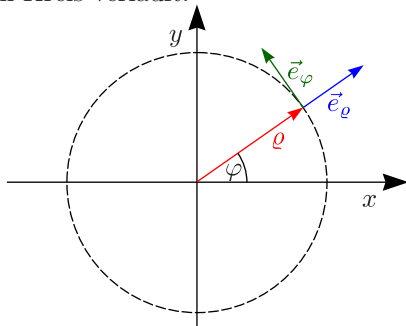
Für $x_0 \mapsto -x_1$ dauert es endlich lange, bis der Ball los rollt; die Nullstelle t_0 rückt nach ∞ .

Aufgabe 32

3 Punkte

a.)

Der Anschaulichkeit halber betrachten wir einen Kreis mit Radius ϱ , dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt. Der Einheitsvektor $\vec{e}_\varrho$ geht radial vom Ursprung aus und steht senkrecht auf dem Kreis, während $\vec{e}_\varphi$ tangential zum Kreis verläuft:



1 Punkt

b.)

Wir berechnen die angegebenen Ausdrücke:

$$\vec{e}_\varrho^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \boxed{1}, \quad \vec{e}_\varphi^2 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \boxed{1}, \quad \vec{e}_z^2 = \boxed{1}$$

0,5 Punkte

$$\vec{e}_\varrho \cdot \vec{e}_\varphi = -\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi = \boxed{0}, \quad \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = \boxed{0}, \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\varphi = \boxed{0}$$

0,5 Punkte

Die letzten beiden Ergebnisse sind trivial, da $\vec{e}_z$ ja senkrecht auf der Ebene steht, in der die Einheitsvektoren $\vec{e}_\varrho$ und $\vec{e}_\varphi$ liegen.

c.)

Wir wollen nun die Basisvektoren zeitlich ableiten, wobei der Winkel φ zeitabhängig sei. Dann erhalten wir unter Ausnutzung der Kettenregel der Differentiation:

$$\dot{\vec{e}}_\varrho = \frac{d}{dt} (\vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi) = (-\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi) \cdot \dot{\varphi} = \boxed{\vec{e}_\varphi \cdot \dot{\varphi}}$$

0,5 Punkte

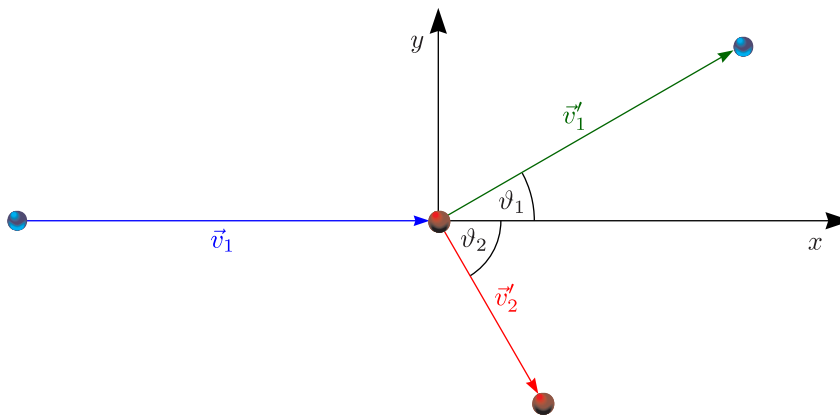
$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d}{dt} (-\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi) = (-\vec{e}_x \cos \varphi - \vec{e}_y \sin \varphi) \cdot \dot{\varphi} = \boxed{-\vec{e}_\varrho \cdot \dot{\varphi}}$$

0,5 Punkte

Aufgabe 33

3 Punkte

a.)



Bei einem elastischen Stoßprozess gilt sowohl der Impuls- als auch der Energieerhaltungssatz:

1.) Impulserhaltung:

Die Summe der Impulse vor dem Stoß muss gleich der Summe der Impulse nach dem Stoß sein:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

Wir quadrieren die Gleichung und multiplizieren mit $\frac{1}{2m}$:

$$\vec{p}_1^2 = (\vec{p}_1' + \vec{p}_2')^2 = \vec{p}_1'^2 + \vec{p}_2'^2 + 2\vec{p}_1' \cdot \vec{p}_2'$$

$$\frac{1}{2m} \vec{p}_1^2 = \frac{1}{2m} \vec{p}_1'^2 + \frac{1}{2m} \vec{p}_2'^2 + \frac{1}{m} \vec{p}_1' \cdot \vec{p}_2' \quad (*)$$

0,5 Punkte

2.) Energieerhaltung:

Die Summe der Energien vor dem Stoß muss gleich der Summe der Energien nach dem Stoß sein:

$$E_1 = E_1' + E_2' \Rightarrow \frac{1}{2m} \vec{p}_1^2 = \frac{1}{2m} \vec{p}_1'^2 + \frac{1}{2m} \vec{p}_2'^2 \quad (**)$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (*) und (**) ergibt sich die Bedingung, dass $\vec{p}_1'$ und $\vec{p}_2'$ senkrecht aufeinander stehen müssen, also $\vec{p}_1' \cdot \vec{p}_2' = 0$. Damit ist die Summe der eingeschlossenen Winkel ϑ_1 und ϑ_2 gleich 90° :

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = 90^\circ \Rightarrow \vartheta_2 = 90^\circ - \vartheta_1 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

0,5 Punkte

Damit können wir die Impulserhaltung in y -Richtung auswerten:

$$mv'_1 \cdot \sin \vartheta_1 = mv'_2 \cdot \sin \vartheta_2 \Rightarrow \frac{v'_1}{v'_2} = \frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} = \frac{\sin(60^\circ)}{\sin(30^\circ)} = \sqrt{3}$$

$$\frac{E'_1}{E'_2} = \left(\frac{v'_1}{v'_2} \right)^2 = 3 \Rightarrow E'_1 = 3E'_2$$

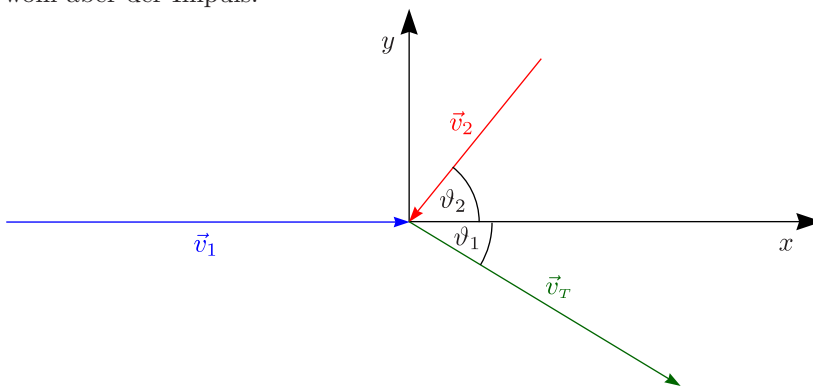
Weiter ist $E_1 = E'_1 + E'_2 = 4E'_2$ und daraus folgt schließlich für die Energien der Teilchen nach dem Stoß:

$$E'_2 = \frac{1}{4}E_1 \text{ und } E'_1 = \frac{3}{4}E_1$$

1 Punkt

b.)

Aus Proton und Neutron entsteht ein Deuteron; nach dem Stoßprozess trennen sich also die Teilchen nicht wieder voneinander. Es handelt sich damit um einen inelastischen Stoß, bei dem die Energie nicht erhalten ist, wohl aber der Impuls.



Berücksichtigt man also Impulserhaltung in y - und x -Richtung, so folgen die Gleichungen:

$$mv_2 \cdot \sin \vartheta_2 = 2mv_T \cdot \sin \vartheta_1$$

$$m(v_1 - v_2 \cdot \cos \vartheta_2) = 2mv_T \cdot \cos \vartheta_1$$

Dividiert man diese beiden Gleichungen durcheinander, ergibt sich:

$$\tan \vartheta_1 = \frac{v_2 \cdot \sin \vartheta_2}{v_1 - v_2 \cdot \cos \vartheta_2}$$

1 Punkt

Aufgabe 34

4 Punkte

a.)

Wir betrachten

$$\vec{r} = \vec{e}_x \cdot x + \vec{e}_y \cdot y + \vec{e}_z \cdot z = \varrho \cdot \vec{e}_\varrho + z \cdot \vec{e}_z$$

und

$$\vec{a} = \vec{e}_x \cdot a_x + \vec{e}_y \cdot a_y + \vec{e}_z \cdot a_z = \vec{e}_\varrho \cdot a_\varrho + \vec{e}_\varphi \cdot a_\varphi + \vec{e}_z \cdot a_z$$

Daraus ergibt sich dann die Kraft durch Bildung des Kreuzproduktes:

$$\begin{aligned} \vec{F} = \vec{r} \times \vec{a} &= \vec{e}_x \cdot (ya_z - za_y) + \vec{e}_y \cdot (-xa_z + za_x) + \vec{e}_z \cdot (xa_y - ya_x) = \\ &= \vec{e}_\varrho \cdot (-za_\varphi) - \vec{e}_\varphi(\varrho a_z - za_\varrho) + \vec{e}_z \cdot (\varrho a_\varphi) \end{aligned}$$

1 Punkt

b.)

Entlang des Integrationsweges gilt $d\vec{r} = \vec{e}_\varphi \cdot \varrho d\varphi$.

$$I = \int d\vec{r} \vec{F} = \int_0^{2\pi} d\varphi (\varrho \cdot \vec{e}_\varphi) \cdot [\vec{e}_\varrho \cdot (-za_\varphi) - \vec{e}_\varphi \cdot (\varrho a_z - za_\varrho) + \vec{e}_z \cdot (\varrho a_\varphi)]_{z=0} = -\varrho^2 a_z \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

1 Punkt

$$= \boxed{-2\pi \cdot \varrho^2 \cdot a_z}$$

c.)

In kartesischen Koordinaten haben wir:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \vec{e}_x \cdot [(\partial_y \vec{F})_z - (\partial_z \vec{F})_y] - \vec{e}_y \cdot [(\partial_x \vec{F})_z - (\partial_z \vec{F})_x] + \vec{e}_z \cdot [(\partial_x \vec{F})_y - (\partial_y \vec{F})_x] = \\ &= \vec{e}_x \cdot [-a_x - a_x] + \vec{e}_y \cdot [-a_y - a_y] + \vec{e}_z \cdot [-a_z - a_z] = \boxed{-2\vec{a}} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$I = \int_{A_0} dA \vec{e}_z \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \int_{A_0} dA (-2a_z) = \boxed{-2\pi \cdot \varrho^2 \cdot a_z}$$

1 Punkt

ist, da $A_0 = \pi \varrho^2$ gilt.

d.)

Wir haben zuvor $\vec{\nabla} \times \vec{F} = -2\vec{a}$ berechnet. Damit $\vec{F}$ konservativ wäre, müsste $\vec{F}$ wirbelfrei sein, also $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ gelten, was aber offensichtlich nicht der Fall ist. Damit ist $\vec{F}$ keine konservative Kraft.

1 Punkt