10. Übung zur Vorlesung — Theoretische Physik A
Universität Karlsruhe — WS 2004/05

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/
Vorrechnen: Freitag, 28.01.2005

Aufgabe 35 Einfaches Pendel in Zylinderkoordinaten: (6 Punkte)

In dieser Übung wird die Bewegungsgleichung eines einfachen Pendels (Punktmasse m an einem massenlosen Stab der Länge l) in Zylinderkoordinaten (siehe Aufgabe 32) hergeleitet. Wir wählen den Ursprung am Aufhängepunkt, das Pendel schwinge in der x-y-Ebene (d.h. $z=0$), mit x positiv nach unten. Um Newtons Gesetz, $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}} \equiv m\vec{a}$, in Zylinderkoordinaten zu schreiben, benötigen wir die Komponenten der Beschleunigung $\vec{a} = \hat{e}_\rho a_\rho + \hat{e}_\phi a_\phi$ und der Kraft $\vec{F} = \hat{e}_\rho F_\rho + \hat{e}_\phi F_\phi$, wobei $\hat{e}_\rho$ und $\hat{e}_\phi$ die in Aufgabe 32 besprochenen zylindrischen Einheitsvektoren sind.

a) Für $z=0$, gilt $\vec{r} = \hat{e}_\rho \rho$. Zeigen Sie, dass dann $\dot{\vec{r}} = \hat{e}_\rho\,\dot{\rho} + \hat{e}_\phi\,\rho\,\dot{\phi}$. (1 Punkt)

b) Finden Sie $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$, und zeigen Sie, dass Newtons Gesetz folgende Form annimmt:

$$m(\rho\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\phi}) = F_\phi\,, \tag{1}$$

$$m(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2) = F_\rho\,. \tag{2}$$

(2 Punkte)

c) Die Länge der Stange sei konstant $\rho = l$. In diesem Fall tritt keine Bewegung in $\hat{e}_\rho$-Richtung auf. Zeigen Sie, dass dann das Pendel durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben wird:

$$m\,\rho\,\ddot{\phi} = -m\,g\,\sin\phi\,, \tag{3}$$

Durch Lösen dieser Gleichung die die Bewegung in die $\hat{e}_\phi$-Richtung beschreibt, kann $\phi(t)$ bestimmt werden (nicht gefordert). (1 Punkt)

d) Leiten Sie, ausgehend von Gl. (3), den Energieerhaltungssatz $\frac{d}{dt}E_T = 0$ her, wobei $E_T = \frac{1}{2}m\,l^2\,\dot{\phi}^2 + m\,g\,l\,(\cos\phi_0 - \cos\phi)$ die Gesammtenergie des Pendels ist, und $\phi_0 = \phi(t=0)$. (2 Punkte)

Aufgabe 36 Relativbewegung: (4 Punkte)

Eine Person in einem Ruderboot rudert in stillem Wasser mit einer Geschwindigkeit v über einen Fluss der Breite b. Die Geschwindigkeit des Wassers relativ zum Ufer sei u.

a) In welche Richtung muss die Person rudern, damit sie am anderen Ufer am Punkt direkt gegenüber des Startpunktes landet?
(1 Punkt)

b) In welche Richtung muss sich das Boot bewegen, damit die Person den Fluss in der kürzestmöglichen Zeit überquert?
Hinweis: Betrachten Sie das Problem im Bezugsystem des Flusses.
(1 Punkt)

c) Zu Fuß geht die Person mit einer Geschwindigkeit w. In welche Richtung muss sich das Boot bewegen, damit die Person (mit einer Kombination von Rudern und anschließendem Gehen am anderen Ufer) den Punkt direkt gegenüber des Startpunktes in der kürzestmöglichen Zeit erreicht?
(2 Punkte)

Aufgabe 37 Beispiel einer Zentralkraft: (5 Punkte)

Betrachten Sie zwei Punktmassen m_1 und m_2, verbunden durch eine Schnur (Länge l), die durch ein kleines Loch in einem Tisch reibungslos gleiten kann. m_1 bewege sich auf dem Tisch, und werde durch die Zylinderkoordinaten $(\rho, \phi, z = 0)$ beschrieben, wobei der Ursprung am Loch im Tisch liege und die z-Achse nach oben zeige. m_2 hänge an der Schnur, auf einer Höhe $z = \rho - l$ relativ zur Tischplatte. Wir nehmen an, dass die Schnur stets gespannt bleibt. Wir werden ρ und ϕ als unabhängige Variablen benutzen, mit Anfangswerten ρ_0, ϕ_0, und $\dot{\rho}_0$, $\dot{\phi}_0$ als Anfangswerte für ihre Ableitungen.

a) Was ist die Grösse L des Drehimpulses $\vec{L} = \hat{e}_z L$? Benutzen Sie Drehimpulserhaltung, um $\dot{\phi}$ als Funktion von ρ (und L) auszudrücken. (1 Punkt)

b) Was ist die Gesammtenergie $E = T + V$ (als Funktion von ρ, $\dot{\rho}$ und $\dot{\phi}$), wenn der Nullpunkt der potentiellen Energie bei $\rho = l$ gewählt wird? *Hinweis:* T hat einen Beitrag von der hängenden Masse, und einen radialen sowie Winkelbeitrag von der kreisenden Masse. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass die Energie aus b) in die Form

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho) \text{ , wobei } \quad V_{eff}(\rho) = \frac{L^2}{2m_1\rho^2} + m_2 g(\rho - l) \tag{4}$$

gebracht werden kann [eliminieren Sie $\dot{\phi}$ mittels a)]. Zeichnen Sie das effektive Potential $V_{eff}(\rho)$. Bestimmen Sie den Radius $\bar{\rho}_0$, an dem das Minimum von $V_{eff}(\rho)$ liegt. Zeichnen Sie auch die Energie E für den Fall $V_{eff}(\bar{\rho}_0) < E < 0$ ein, und deuten Sie auf der Skizze die extremen Radii ρ_{min} und ρ_{max} an (ohne Rechnung) zwischen denen sich ρ bewegt. (3 Punkte)