

LÖSUNGSVORSCHLAG THEORETISCHE PHYSIK A

ZEHNTES ÜBUNGSBLATT

Prof. Dr. Schön und Dr. Eschrig

Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 35

6 Punkte

a.)

Die Schnur hat konstante Länge und verläuft radial zum Ursprung, womit sich die Bewegung des Pendels geschickt durch Zylinderkoordinaten mit $z = 0$ beschreiben lässt. Der Massenpunkt läuft auf einem Kreis mit Radius ϱ , also können wir den Ortsvektor dieses Massenpunktes als $\vec{r} = \varrho \vec{e}_\varrho$ schreiben. Wir erhalten den Vektor der Geschwindigkeit durch einmalige Differentiation von $\vec{r}$ nach der Zeit t :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\varrho} \vec{e}_\varrho + \varrho \dot{\vec{e}}_\varrho = \dot{\varrho} \vec{e}_\varrho + \varrho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

1 Punkt

(In Aufgabe 32 hatten wir ja erhalten, dass $\dot{\vec{e}}_\varrho = \vec{e}_\varphi \dot{\varphi}$ ist.)

b.)

Durch nochmalige Differentiation nach t folgt der Vektor der Beschleunigung:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\varrho} \vec{e}_\varrho + \dot{\varrho} \dot{\vec{e}}_\varrho + \varrho \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{\varrho} \dot{\vec{e}}_\varphi + \varrho \dot{\varphi} \dot{\vec{e}}_\varphi = \vec{e}_\varrho (\ddot{\varrho} - \dot{\varphi}^2 \varrho) + \vec{e}_\varphi (\ddot{\varphi} \varrho + 2\dot{\varphi} \dot{\varrho})$$

Daraus folgt also eine Kraft, die in radiale Richtung zeigt, nämlich

$$F_\varrho = m a_\varrho = m (\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2)$$

1 Punkt

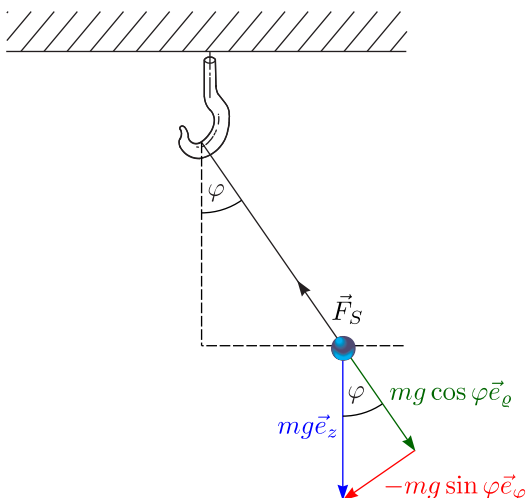
und eine Kraft die tangential zum Kreis zeigt, auf welchem sich der Massenpunkt bewegt, also

$$F_\varphi = m a_\varphi = m (\varrho \ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho} \dot{\varphi})$$

1 Punkt

F_ϱ bezeichnet man als Zentripetalkraft und F_φ als Tangentialkraft.

c.)



Die Bewegungsgleichung in Richtung $\vec{e}_\varrho$ lautet:

$$F_\varrho = mg \cdot \cos \varphi - F_S$$

Diese benötigen wir jedoch nicht zur Beschreibung der Bewegung des Pendels, sondern statt dessen $F_\varphi = -mg \sin \varphi$. Da $\varrho \equiv l$ konstant ist, gilt $\dot{\varrho} = \ddot{\varrho} = 0$ und wir erhalten:

$$m\varrho\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi$$

1 Punkt

d.)

Wir multiplizieren obige Differentialgleichung mit $\dot{\varphi}$:

$$m\varrho\ddot{\varphi}\dot{\varphi} = -mg\dot{\varphi}\sin \varphi$$

Wir können diese Gleichung nun folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \varrho \dot{\varphi}^2 \right] = \frac{d}{dt} [mg \cos \varphi] \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \varrho \dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi \right] = 0$$

1 Punkt

Es gilt also:

$$\frac{d}{dt} E_T = 0 \text{ mit } E_T = \frac{m}{2} \varrho \dot{\varphi}^2 + mg [\cos \varphi_0 - \cos \varphi]$$

1 Punkt

Es ist auch möglich, das ganze folgendermaßen zu zeigen. Dazu gehen wir von der angegebenen Beziehung für E_T aus und differenzieren diese einmal nach der Zeit:

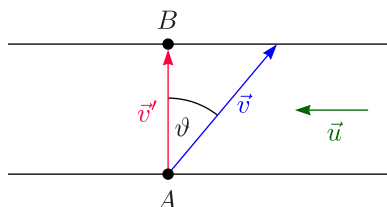
$$\frac{d}{dt} E_T = m\varrho\dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} + mg\dot{\varphi} \cdot \sin \varphi = \dot{\varphi} \cdot \underbrace{(m\varrho\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi)}_{=0} = 0$$

Dies folgt unter Ausnutzung der Bewegungsgleichung.

Aufgabe 36

4 Punkte

a.)

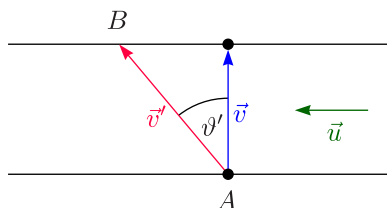


Das Boot erreicht den Punkt direkt gegenüber des Startpunktes, wenn sich die Geschwindigkeitskomponente v_x (parallel zur Geschwindigkeit $\vec{u}$ des Flusses) und $\vec{u}$ selbst gegenseitig kompensieren:

$$v_x - u = 0 \Rightarrow v \sin \vartheta = u \Rightarrow \vartheta = \arcsin \left(\frac{u}{v} \right)$$

1 Punkt

b.)



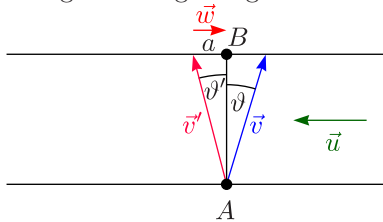
Im Bezugssystem des Flusses wird die Zeit genau dann minimal, wenn wir den geradlinigen Weg senkrecht zum Ufer wählen. Es muss also $v = v_y$ und $v_x = 0$ sein. Rechnen wir die Geschwindigkeiten zurück ins Bezugssystem des Ufers, so gilt $v'_x = -u$ und $v'_y = v$ und damit erhalten wir:

$$\tan \vartheta' = \frac{u}{v} \Rightarrow \vartheta' = \arctan \left(\frac{u}{v} \right)$$

1 Punkt

c.)

Es sei ϑ der Winkel, in welchem die Person rudern muss und ϑ' der Winkel, in dessen Richtung sich das Boot bewegt. Die zugehörigen Geschwindigkeiten seien $\vec{v}$ beziehungsweise $\vec{v}'$.



Wir berechnen nun zuerst ϑ . t_1 sei die Zeit, die das Boot benötigt, um das andere Flussufer zu erreichen. Mit t_2 bezeichnen wir die Zeit, welche der Fahrer des Bootes benötigt, um am anderen Ufer zu Fuß den Punkt zu erreichen, dem der Startpunkt gegenüber liegt.

$$t_1 = \frac{b}{v_y} = \frac{b}{v \cos \vartheta} \text{ und } t_2 = \frac{a}{w}$$

a ist der Weg, den das Boot parallel zum Ufer in der Zeit t_1 – also der Überquerung des Flusses – zurücklegt:

$$a = t_1 \cdot |v_x - u| = t_1 \cdot |v \sin \vartheta - u|$$

Die Gesamtzeit T ergibt sich dann durch Addition von t_1 und t_2 :

$$T(\vartheta) = \frac{b}{v \cos \vartheta} + \frac{b}{vw \cos \vartheta} |v \sin \vartheta - u| = \frac{b}{v \cos \vartheta} \cdot \left(1 + \frac{|u - v \sin \vartheta|}{w}\right) \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

Der Punkt $u = v \sin \vartheta$ muss gesondert behandelt werden, da $T(\vartheta)$ dort nicht differenzierbar ist. Ansonsten finden wir das Minimum in Abhängigkeit vom Winkel ϑ durch Ableiten von $T(\vartheta)$ nach ϑ und Nullsetzen (z.B. für $u \geq v \sin \vartheta$):

$$\frac{dT}{d\vartheta} = \frac{b}{v \cos \vartheta} \cdot \left[\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \cdot \left(1 + \frac{u}{w} - \frac{v}{w} \sin \vartheta\right) - \frac{v}{w} \cos \vartheta \right] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\sin \vartheta \cdot \left(1 + \frac{u}{w} - \frac{v}{w} \sin \vartheta\right) = \frac{v}{w} \cos^2 \vartheta = \frac{v}{w} (1 - \sin^2 \vartheta)$$

$$\sin \vartheta \cdot \left(1 + \frac{u}{w}\right) = \frac{v}{w} \Rightarrow \sin \vartheta = \frac{v}{w + u} \Rightarrow \boxed{\vartheta = \arcsin\left(\frac{v}{w + u}\right)}$$

(Dasselbe ergibt sich für $u \leq v \sin \vartheta$.) Die Zeit, die benötigt wird, ist:

$$T = b \cdot \frac{\sqrt{(u + v)^2 - v^2}}{vw}.$$

Wir müssen nun noch diese Zeit mit der für den speziellen Winkel

$$\theta = \arcsin\left(\frac{u}{v}\right)$$

vergleichen, bei der $T(\vartheta)$ nicht differenzierbar ist. Für diesen Winkel gilt

$$T_\theta = b \cdot \frac{u}{v^2 - u^2}.$$

Dieser Fall entspricht der Situation $a = 0$, also wenn die Person nicht zu laufen braucht. Das Boot bewegt sich in diesem Fall mit $\vartheta' = 0$, also senkrecht zum Ufer. Die entsprechende Lösung ist dann günstiger als die erste Lösung, wenn $u(w + u) \leq v^2$. Ansonsten ist die erstgenannte Lösung die günstigere.

Für die gesamte Geschwindigkeit des Bootes gilt nun $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$, also in Komponenten $v'_x = v_x - u$ und $v'_y = v_y$. Nach PYTHAGORAS erhalten wir dann für den Betrag von $\vec{v}'$:

$$|\vec{v}'| = v' = \sqrt{(v_x - u)^2 + v_y^2}$$

Aus der Bedingung $v' \cos \vartheta' = v \cos \vartheta$ erhalten wir schließlich den Winkel ϑ' , in dessen Richtung sich das Boot für die erste Lösung bewegen muss:

$$\begin{aligned}\vartheta' &= \arccos\left(\frac{v}{v'} \cos \vartheta\right) = \arccos\left(\frac{v}{\sqrt{(v_x - u)^2 + v_y^2}} \cdot \cos\left[\arcsin\left(\frac{v}{w + u}\right)\right]\right) = \\ &= \arccos\left(\frac{v}{\sqrt{(v \sin \vartheta - u)^2 + v^2 \cos^2 \vartheta}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{w + u}\right)^2}\right) = \\ &= \arccos\left(\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{w + u}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{w + u}\right)^2 + \left(\frac{v}{w + u} - \frac{u}{v}\right)^2}}\right)\end{aligned}$$

1 Punkt

Aufgabe 37

5 Punkte

a.)

Für den Impuls des ersten Teilchens ergibt sich:

$$\vec{p}_1 = m_1 \dot{\vec{x}} = m_1 (\dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y) = m_1 (\dot{\varrho} \vec{e}_\varrho + \varrho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)$$

Damit können wir den Drehimpuls nach der allgemeinen Formel berechnen:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{e}_x (yp_z - zp_y) + \vec{e}_y (zp_x - xp_z) + \vec{e}_z (xp_y - yp_x) \stackrel{p_z=0}{=} \vec{e}_z (xp_y - yp_x) = \vec{e}_z \cdot m_1 (x\dot{y} - y\dot{x})$$

In Polarkoordinaten gilt:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \varrho \vec{e}_\varrho \times m_1 (\dot{\varrho} \vec{e}_\varrho + \varrho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) = m_1 \varrho^2 \dot{\varphi} \vec{e}_\varrho \times \vec{e}_\varphi = m_1 \varrho^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

Hieraus ergibt sich:

$$L = m_1 \varrho^2 \dot{\varphi} \text{ und } \dot{\varphi} = \frac{L}{m_1 \varrho^2}$$

1 Punkt

b.)

Wir berechnen als erstes den kinetischen Anteil:

$$T = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{m_1^2}{2m_1} \cdot (\dot{\varrho}^2 + 2\dot{\varrho}\varrho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varrho + \varrho^2\dot{\varphi}^2) + \frac{m_2^2\dot{\varrho}^2}{2m_2} = \frac{1}{2}m_1 (\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{\varrho}^2$$

Nur die unter dem Tisch hängende Masse m_2 liefert einen Anteil zur potentiellen Energie, da wir das Nullniveau nach $\varrho = l$, also $z = 0$ legen:

$$V = m_2 g (\varrho - l)$$

Damit ergibt sich die Gesamtenergie $E = T + V$:

$$E = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\varrho}^2 + \frac{m_1}{2} \varrho^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 g (\varrho - l)$$

1 Punkt

c.)

Wir schreiben die Gesamtenergie E in folgender Form:

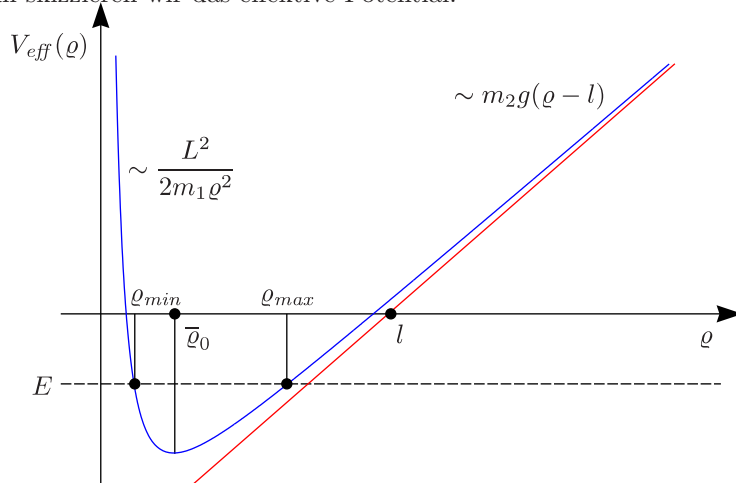
$$E = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\varrho}^2 + V_{\text{eff}}(\varrho)$$

Dabei drücken wir das effektive Potential V_{eff} durch den konstanten Drehimpuls L aus:

$$V_{eff}(\varrho) = m_2 g(\varrho - l) + \frac{m_1}{2} \varrho^2 \dot{\varphi}(\varrho)^2 = m_2 g(\varrho - l) + \frac{m_1}{2} \varrho^2 \cdot \left(\frac{L}{m_1 \varrho^2} \right)^2 = \boxed{\frac{L^2}{2m_1 \varrho^2} + m_2 g(\varrho - l)}$$

1 Punkt

Nun skizzieren wir das effektive Potential:



1 Punkt

Das Maximum $\bar{\varrho}_0$ erhalten wir durch Differentiation nach ϱ und anschließendem Nullsetzen:

$$\frac{d}{d\varrho} V_{eff}(\varrho) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow -\frac{2L^2}{2m_1 \bar{\varrho}_0^3} + m_2 g = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{\varrho}_0 = \sqrt[3]{\frac{L^2}{m_1 m_2 g}}}$$

1 Punkt