12. Übung zur Vorlesung Theoretische Physik A
Universität Karlsruhe WS 2004/05

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/

Die Aufgaben dieses Übungsblattes sind Zusatzaufgaben, keine Pflichtaufgaben.
Sie können mit Hilfe dieser Aufgaben noch ihr Punktekonto verbessern.
Abgabe der schriflichen Lösungen: Freitag, 11.02.2005

Aufgabe 42 ∗ Volumenintegration in Polarkoordinaten: (4 Punkte)

a) Zeigen Sie anhand einer Skizze, dass das Volumenelement $\mathrm{d}V \equiv \mathrm{d}^3\mathrm{r} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ in Polarkoordinaten durch $r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ gegeben ist. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie das Volumen einer Kugel vom Radius R, indem Sie die Integration

$$V = \int_{r<R} \mathrm{d}V \tag{1}$$

in Polarkoordinaten durchführen. (2 Punkte)

Aufgabe 43 ∗ Schwerepotential einer homogenen Kugel: (11 Punkte)

Das Schwerepotential eines Massenelements $\mathrm{d}m$ am Ort $\vec{r}'$ wird durch

$$\mathrm{d}U(\vec{r}) = -G\frac{\mathrm{d}m}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{2}$$

mit der Gravitationskonstanten G gegeben.

a) Berechnen Sie das Gravitationspotential $U(r)$ einer Kugel vom Radius R mit homogener Massenverteilung im Abstand $r > R$ vom Zentrum der Kugel, indem Sie im obigen Ausdruck $\mathrm{d}m$ durch $\rho \mathrm{d}^3 r'$ ersetzen, und mittels Polarkoordinaten über das Kugelvolumen integrieren. Hierbei ist ρ die (konstante) Massendichte der Kugel.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'}$, wobei r, θ, ϕ die Polarkoodinaten von $\vec{r}$ und r', θ', ϕ' die Polarkoodinaten von $\vec{r}'$ seien. Das auftretende Winkelintegral kann durch die Substitution $u = \cos\theta'$ gelöst werden. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie das Potential der homogenen Kugel nun auch im inneren der Kugel. Führen Sie dazu die Integration über r' in zwei Schritten aus: Bestimmen Sie zunčhst den Beitrag zum Integral vom Bereich $0 < r' < r$ und dann den Beitrag von Bereich $r < r' < R$. (3 Punkte)

c) Zeichnen Sie das Potential der Kugel $U(r)$ für den gesamten Bereich $r < R$ und $r > R$. (1 Punkt)

d) Berechnen Sie die Schwerekraft $\vec{F} = -m_0 \nabla U$ der Kugel auf eine Punktmasse m_0 im Abstand r vom Kugelmittelpunkt für die beiden Fälle $r < R$ und $r > R$. (2 Punkte)

e) Zeigen Sie, dass für den Fall $r < R$ die Schwerekraft der Kugel auf die Punktmasse m_0 gleich der Schwerekraft ist, die man erhält, wenn man den Teil der Massenverteilung der Kugel mit $r' < r$ im Ursprung zu einer Punktmasse vereinigt und den Teil mit $r' > r$ ins Unendliche verschiebt. (1 Punkt)