

LÖSUNGSVORSCHLAG THEORETISCHE PHYSIK A ZWÖLFTES ÜBUNGSBLATT

Prof. Dr. Schön und Dr. Eschrig

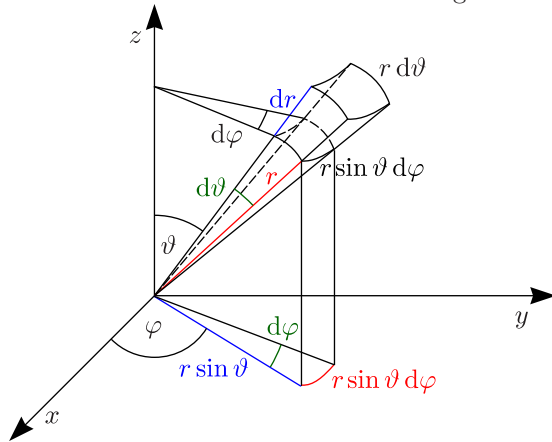
Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 42

4 Punkte

a.)

Wir betrachten zur besseren Übersicht folgende Zeichnung:



2 Punkte

Für das Volumenelement ergibt sich:

$$dV = dr \cdot r d\vartheta \cdot r \sin \vartheta d\varphi = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

b.)

Das Volumen der Kugel ergibt sich durch Integration über $r \in [0; R]$, $\varphi \in [0; 2\pi]$ und $\vartheta \in [0; \pi]$:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{r < R} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^R r^2 dr = 2\pi \cdot [-\cos \vartheta]_0^\pi \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^R = \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3} \end{aligned}$$

2 Punkte

Aufgabe 43

11 Punkte

a.)

Wir erhalten das Gravitationspotential durch die angegebene Integration in Kugelkoordinaten:

$$U(\vec{r}) = -G\varrho \cdot \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' = -G\varrho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 \sin \vartheta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'}} d\varphi' d\vartheta' dr'$$

1 Punkt

Dies gilt, da

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'}$$

wobei ϑ' der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ ist. Zur Berechnung des Integrals machen wir die Substitution $\cos \vartheta' = u$,
 $-\sin \vartheta' d\vartheta' = du$:

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= -2\pi \varrho G \cdot \int_{-1}^{+1} du \int_0^R dr' \frac{r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u}} = \\ &= -2\pi \varrho G \int_0^R dr' \frac{r'^2}{rr'} \cdot \left[\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'} - \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'} \right] = \\ &= -2\pi \varrho G \int_0^R dr' \frac{r'}{r} \cdot (|r + r'| - |r - r'|) \end{aligned}$$

2 Punkte

Da im Außenraum der Kugel $r > R$ gilt, ist immer $r > r'$, also $|r + r'| - |r - r'| = r + r' - (r - r') = 2r'$ und somit folgt weiter:

$$U(\vec{r}) = U(r) = -\frac{2\pi \varrho G}{r} \int_0^R dr' r'^2 = \boxed{-\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \varrho \cdot \frac{G}{r}}$$

1 Punkt

Mit der Masse der Kugel $M = \varrho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$ können wir dies als $U(r) = -G \cdot \frac{M}{r}$ schreiben. Das heißt, das Potential ist dasselbe wie das einer Punktmasse bei $r = 0$ mit $M = \varrho \cdot V$.

b.)

Wir berechnen nun das Potential im Innern der Kugel. Das Integral muss dazu in zwei Anteile aufgespalten werden, nämlich in einen mit $0 < r' < r$ und einen zweiten mit $r < r' < R$. Zuerst bedenken wir:

a.) $0 < r' < r$: $|r + r'| - |r - r'| = r + r' - (r - r') = 2r'$ 0,5 Punkte

b.) $r < r' < R$: $|r + r'| - |r - r'| = r + r' + (r - r') = 2r$ 0,5 Punkte

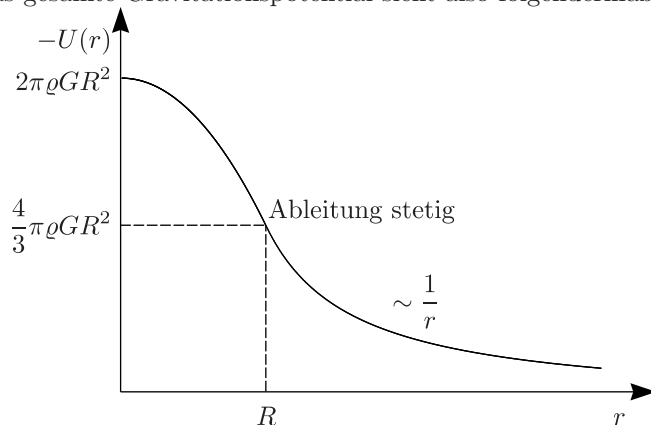
Damit ergibt sich also:

$$\begin{aligned} U(r) &= -2\pi \varrho G \left[\int_0^r dr' \frac{r'}{r} \cdot (r + r' - r + r') + \int_r^R dr' \frac{r'}{r} \cdot (r + r' - r' + r) \right] = \\ &= -4\pi \varrho G \left[\int_0^r dr' \frac{r'^2}{r} + \int_r^R dr' r' \right] = -4\pi \varrho G \left[\frac{r^2}{3} + \frac{R^2 - r^2}{2} \right] = \boxed{-2\pi \varrho G R^2 + \frac{2\pi \varrho G r^2}{3}} \end{aligned}$$

2 Punkte

c.)

Das gesamte Gravitationspotential sieht also folgendermaßen aus:



1 Punkt

d.)

Die Kraft, die ein sich im Gravitationspotential $U(r)$ befindender Körper der Masse m_0 erfährt, ergibt sich durch Bildung des Gradienten des Potentials, also $\vec{F} = -m_0 \vec{\nabla} U(r)$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1.) Körper der Masse m_0 befindet sich außerhalb der Kugel: $r > R$

$$\vec{F} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho G m_0 \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho G m_0 \cdot \frac{\vec{e}_r}{r^2} = -M m_0 G \frac{\vec{e}_r}{r^2} \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

2.) Körper der Masse m_0 befindet sich innerhalb der Kugel: $r < R$

$$\vec{F} = -\frac{2\pi \rho G m_0}{3} \vec{\nabla}(r^2) = -\frac{4}{3}\pi \rho G m_0 r \vec{e}_r \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

e.)

Für den zweiten Fall, also $r < R$, können wir $\vec{F}$ noch weiter umformen:

$$\vec{F} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho G m_0 \frac{\vec{e}_r}{r^2} = -M_r G m_0 \cdot \frac{\vec{e}_r}{r^2} = -M_r m_0 G \cdot \frac{\vec{e}_r}{r^2} \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

$M_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ ist hierbei die Masse einer Kugel vom Radius r und $-M_r \frac{G}{r}$ das Potential einer Punktmasse M_r am Ursprung. Die restliche Masse für $r > r'$ trägt nicht zur Gravitationskraft $\vec{F}$ bei und verhält sich also so, als befände sie sich im Unendlichen.