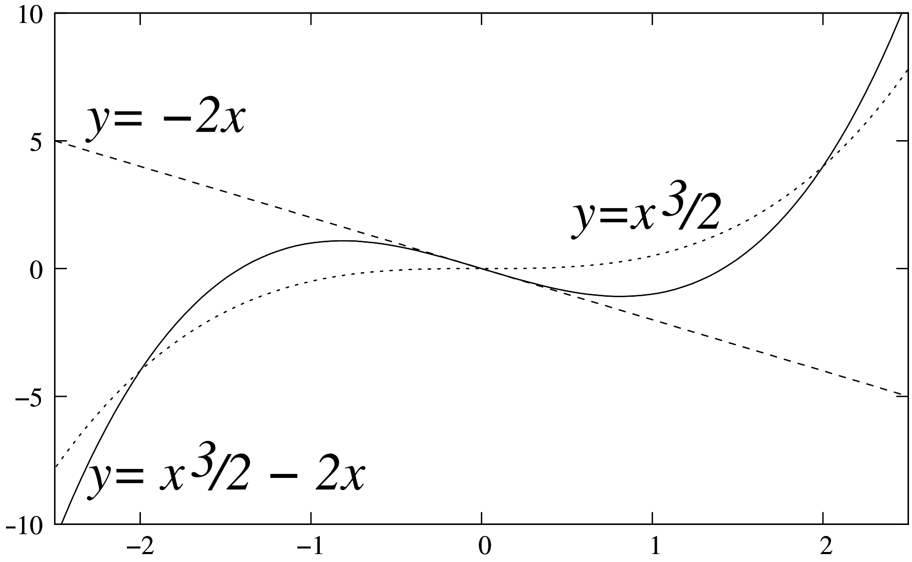
Theorie A (WS 2005/06)
Musterlösung Übungsblatt **0** 28.10.05

1



2

$$f(x) = \cos(ax^2) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(ax^2)\, 2ax$$
$$f(t) = e^{\sin(\omega t)} \quad \Rightarrow \quad \dot{f}(t) = e^{\sin(\omega t)}\, \cos(\omega t)\, \omega$$
$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{e^x}{1+x^2} - \frac{e^x\, 2x}{(1+x^2)^2} = e^x \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$$

3

$$I(x) = \int \mathrm{d}x\, \frac{x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}u\, \frac{1}{u^2} = -\frac{1}{2u} = \frac{-1}{2(1+x^2)}$$

mit $u(x) = 1 + x^2 \;\to\; \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u\,.$

$$I(x) = \int \mathrm{d}x\, xe^x = xe^x - \int \mathrm{d}x\, e^x = e^x(x-1)$$

mit $v(x) = x \to v'(x) = 1 \;\;, \quad u'(x) = e^x \to u(x) = e^x\,.$

$$I(T) = \int_0^T \mathrm{d}t\, \sin(\omega t)\cos(\omega t) = \frac{1}{\omega}\int_{u(0)=0}^{u(T)=\omega T} \mathrm{d}u\, \sin(u)\cos(u) \qquad \text{mit } u(t) = \omega t$$

$$= \frac{1}{\omega}\left[\sin^2(u)\Big|_{u=0}^{u=\omega T} - \int_0^{\omega T} \mathrm{d}u\, \sin(u)\cos(u)\right] \Rightarrow I(T) = \frac{1}{2\omega}\sin^2(\omega T)$$

4 **a)**

$$\cosh^2(x) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2)$$
$$\sinh^2(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$$

5 **a)** Ausgeschrieben lautet das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} -\lambda x + 2y &= 0 \Rightarrow x = \tfrac{2}{\lambda}y \\ x + (1-\lambda)y &= 0 \Rightarrow x = (\lambda - 1)y \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{2}{\lambda}y = (\lambda - 1)y$$

Die letzte Gleichung hat nur dann eine nichttriviale Lösung $y \neq 0$, wenn gilt:

$$\frac{2}{\lambda} = \lambda - 1 \Longrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

b) Einsetzen von λ_1 bzw. λ_2 und Auflösen liefert:

$$\lambda = 2 \Longrightarrow x = y \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} y \ , \quad y \text{ frei wählbar}$$
$$\lambda = -1 \Longrightarrow x = -2y \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} y \ , \quad y \text{ frei wählbar}$$

6 **a)**

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{aa}} = \sqrt{3} \quad , \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{bb}} = \sqrt{5}$$

b)

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

c)

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{r} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})t \quad , \quad t \in [0, 1]$$