

1 a)

$$\mathbf{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}(t) = R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}(t) = R\omega^2 \begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$$

$$r(t) = |\mathbf{r}(t)| = R\sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)} = R$$

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = R\omega\sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)} = R\omega$$

$$a(t) = |\mathbf{a}(t)| = \omega^2 |\mathbf{r}| = \omega^2 R$$

b) Skizze: Bahnkurve ist Kreisbahn mit Radius R . $\mathbf{v}$ -Vektor ist tangential an Bahnkurve, $\mathbf{a}$ -Vektor dem Ortsvektor entgegengesetzt (i.e., nach innen zeigend).

2 a)

$$\mathbf{r}(t) = ct \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}(t) = c \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 1 \end{pmatrix} + \omega ct \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}(t) = 2\omega c \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + \omega^2 ct \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$r(t) = ct\sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) + 1} = \sqrt{2}ct$$

$$v(t) = c\sqrt{2 + \omega^2 t^2}$$

$$a(t) = \omega c\sqrt{4 + \omega^2 t^2}$$

b) Skizze der Bahnkurve: Koordinatensystem: x -Achse nach rechts, y -Achse nach oben, z -Achse aus der Papierebene heraus (in das linke Auge des Betrachters). Dann bildet die Bahnkurve, auf die x - y -Ebene projiziert eine Spirale, die für $t = 0$ bei $(0,0)$ beginnt und in mathem. negativer Umlaufrichtung größer wird. In positiver z -Richtung kommt gleichförmige Bewegung mit $z(0) = 0$ dazu, also: Spirale auf einem Trichter über der x - y -Ebene.

3 a)

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \alpha + t^2 \\ \beta \\ \frac{2}{3}t^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ 2t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + 4t^4} = 2t\sqrt{1+t^2}$$

$$\Rightarrow s(t) = \int_0^t dt' |\mathbf{v}(t')| = \int_0^t dt' 2t' \sqrt{1+(t')^2}$$

Geeignete Substitution: $u(t') = 1 + (t')^2 \Rightarrow du = 2t' dt'$

$$\Rightarrow s(t) = \int_{u(0)}^{u(t)} du \sqrt{u} = \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{u(0)}^{u(t)} = \frac{2}{3} [(1+t^2)^{3/2} - 1]$$

b) (i): t sehr klein. Dann liegt eine Reihenentwicklung nahe (aus Formelsammlung), in der wir nur die ersten 2 Terme mitnehmen:

$$(1+x)^{3/2} \approx 1 + \frac{3}{2}x \quad \text{mit} \quad x = t^2 \quad \text{also} \quad (1+t^2)^{3/2} \approx 1 + \frac{3}{2}t^2$$

$$\Rightarrow s(t) \approx \frac{2}{3} [(1 + \frac{3}{2}t^2) - 1] = t^2$$

(ii): t sehr groß. Dann kann man 1 gegen t^2 vernachlässigen,

$$(1+t^2)^{3/2} \approx (t^2)^{3/2} = t^3 \Rightarrow s(t) \approx \frac{2}{3} [t^3 - 1] \approx \frac{2}{3}t^3$$

4 Es war: $v(t) = R\omega$.

$$s(t) = R\omega \int_0^t dt' = R\omega t$$

Periodendauer T : Nach $t = T$ sollte die Kreisbahn einmal durchlaufen werden, d.h., die Bogenlänge gerade dem Umfang entsprechen:

$$s(T) = 2\pi R \Rightarrow R\omega T = 2\pi R \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

5

$$a = |\mathbf{a}| \Rightarrow a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \Rightarrow \frac{d}{dt}a^2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \Rightarrow 2a \frac{da}{dt} = \mathbf{a} \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \mathbf{a} \Rightarrow a \frac{da}{dt} = \mathbf{a} \frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

Kann man sich auch komponentenweise klarmachen, mit $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$.