

1 Gemäß *Actio = Reactio* wirkt auf das Seil die Kraft 2000 N, es reißt also nicht.
(Die Situation ist eigentlich dieselbe, als wenn eine Mannschaft mit 2000 N an einem Seil zieht, dessen anderes Ende mit der Erde fest verbunden ist.)

2 a) Die Kraft auf P ist die Summe der Gravitationskräfte von m_1 und m_2 . Diese zeigen beide senkrecht nach unten, also ist $\mathbf{F} = -F \mathbf{e}_z$ mit $F = (m_1 + m_2)g$.

b) Die beschleunigte Masse ist $m_1 + m_2$ (das Seil bleibt straff). Als antreibende Kraft wirkt nur die Differenz $(m_1 - m_2)g$, also lautet das 2. Newtonsche Axiom:

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

c) Auf die Massen m_1 und m_2 wirkt jeweils die Gravitationskraft m_1g bzw. m_2g und die Trägheitskraft $-m_1a$ bzw. $+m_2a$. Die Kraft auf P ist also (nach unten positiv gezählt)

$$\begin{aligned} F &= m_1(g - a) + m_2(g + a) = (m_1 + m_2)g - (m_1 - m_2)a \\ &= \left\{ (m_1 + m_2) - (m_1 - m_2) \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right\} g \\ &= \left\{ (m_1 + m_2)^2 - (m_1 - m_2)^2 \right\} \frac{g}{m_1 + m_2} = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}g \end{aligned}$$

3 a) In x -Richtung: gleichförmige Bewegung; in z -Richtung: senkrechter Fall; also:

$$x(t) = v_0 t, \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

Die Bahnkurve $z(x)$ erhält man, indem man die Zeit eliminiert:

$$t = \frac{x}{v_0} \quad \Rightarrow \quad z(x) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2$$

Der Abhang genügt der Kurve $z = -x$, d.h., der Auftreffpunkt $x = d$ ist durch die Bedingung $z(d) = -d$ gegeben:

$$z(d) = -d \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}g \frac{d^2}{(v_0)^2} = d \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{2(v_0)^2}{g}}$$

Daraus ergibt sich die Flugzeit T zu

$$d = v_0 T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{d}{v_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2v_0}{g}}$$

b) Der Geschwindigkeitsbetrag ist gegeben durch $v = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{z})^2}$; am Auftreffpunkt ergibt sich also

$$\dot{x}(T) = v_0, \quad \dot{z}(T) = -gT = -2v_0 \quad \Rightarrow \quad v|_{t=T} = \sqrt{(v_0)^2 + 4(v_0)^2} = \sqrt{5}v_0$$

Für den Winkel α brauchen wir die Steigung m der Bahnkurve $z(x)$ im Auftreffpunkt:

$$m = z'(x)|_{x=d} = -\frac{g}{(v_0)^2}d = -2$$

Der Winkel α ist also der Winkel zwischen einer Geraden mit Steigung -1 (Abhang) und einer Geraden mit Steigung $m = -2$ (Tangente an die Bahnkurve). Dies ist gerade $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$.

4 a) Für beliebiges N gilt zunächst:

$$\text{Impulserhaltung:} \quad p_1^f + p_2^f + p_3^f + \dots + p_N^f = p_1^i$$

$$\text{Energieerhaltung:} \quad (p_1^f)^2 + (p_2^f)^2 + (p_3^f)^2 + \dots + (p_N^f)^2 = (p_1^i)^2$$

Die Massen kürzen sich raus.

Fall $N = 2$:

Es gilt nun:

$$p_1^f + p_2^f = p_1^i, \quad (p_1^f)^2 + (p_2^f)^2 = (p_1^i)^2$$

Einsetzen von Impulserhaltung in Energieerhaltung:

$$\Rightarrow p_2^f = p_1^i - p_1^f \quad \Rightarrow \quad (p_1^f)^2 + (p_1^i - p_1^f)^2 = (p_1^i)^2 \quad \Rightarrow \quad p_1^f(p_1^f - p_1^i) = 0$$

Dies hat zwei Lösungen:

$$p_1^f = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2^f = p_1^i \quad \text{oder} \quad p_1^f = p_1^i \quad \Rightarrow \quad p_2^f = 0$$

Mit der Bedingung $p_1^f \leq p_2^f$ läßt sich die physikalische Lösung $p_1^f = 0, p_2^f = p_1^i$ identifizieren. Dies entspricht auch der experimentellen Erfahrung.

Die zwei Lösungen lassen sich auch graphisch gewinnen: Zeichnet man ein Koordinatensystem mit p_1^f als x -Achse und p_2^f als y -Achse, so stellt die Energieerhaltung einen Kreis um den Ursprung mit Radius p_1^i dar, die Impulserhaltung eine Gerade mit der Gleichung $p_2^f = p_1^i - p_1^f$. Die zwei Lösungen sind die Schnittpunkte von Gerade und Kreis.

b) Fall $N = 3$:

Es gilt nun:

$$p_1^f + p_2^f + p_3^f = p_1^i, \quad (p_1^f)^2 + (p_2^f)^2 + (p_3^f)^2 = (p_1^i)^2$$

Jetzt direkt graphisch: Zeichnet man als Koordinatensystem (x, y, z) die Endimpulse (p_1^f, p_2^f, p_3^f) ein, so ergibt die Energieerhaltung eine Kugel um den Ursprung mit Radius p_1^i . Die Impulserhaltung, $\Rightarrow p_3^f = p_1^i - p_1^f - p_2^f$, ergibt eine Ebene durch die drei Punkte $\{(p_1^f, p_2^f, p_3^f)\} = \{(p_1^i, 0, 0), (0, p_1^i, 0), (0, 0, p_1^i)\}$. Der Schnitt von Ebene und Kugel ist ein Kreis, es gibt also unendlich viele Lösungen. Daraus läßt sich mit der einen Zusatzbedingung $p_1^f \leq p_2^f \leq p_3^f$ keine physikalische Lösung eindeutig identifizieren. Immerhin ist die experimentell beobachtete Lösung $(p_1^f, p_2^f, p_3^f) = (0, 0, p_1^i)$ in dieser Lösungsschar enthalten.

Für $N \geq 4$ ist zu erwarten, daß das Problem noch unbestimmter wird.

c) Der Fehler liegt darin, daß hier angenommen wurde, der Impulsübertrag von p_1^i auf letztlich p_N^f verlaufe instantan, als ein einziger Prozess. In Wirklichkeit muß man aber von einer Sequenz von 2-Kugel-Stoßprozessen ($N = 2$) ausgehen, die nacheinander stattfinden, denn der Impuls braucht eine kleine endliche Zeit für den Weg durch eine Kugel (endliche Schallgeschwindigkeit). Lediglich der Impulsübertrag von einer Kugel zur nächsten darf instantan angenommen werden, da die Kugeloberflächen sich gerade berühren sollen.