Universität Karlsruhe WS 2005/06
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann **11.11.05**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre theorie-a@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochh. Zi. 10.13

Übungsblatt Nr. 3 zur Vorlesung Theorie A

1 Die Differentialgleichung (DGL) des harmonischen Oszillators lautet: $\ddot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = 0$

a) Zeige, daß die folgenden drei Lösungen diese DGL erfüllen:
(i) $x(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi)$, (ii) $x(t) = B\sin(\omega_0 t - \theta)$,
(iii) $x(t) = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t)$.
$A, B, C, D, \varphi, \theta$ sind beliebige Konstanten.

b) Man bestimme für (i), (ii), (iii) jeweils die Konstanten für den Fall, daß $x(t)$ den folgenden Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ genügen soll: $x(0) = d$, $\dot{x}(0) = 0$.

c) Die Konstanten seien nun wieder beliebig. Zeige, daß (i), (ii), (iii) identisch sind. Welche Beziehungen unter den $A, \varphi; B, \theta; C, D$ gelten also? (Formelsammlung.)

2 Löse die folgende DGL durch “Trennung der Veränderlichen”:

$\dot{y}(t) + \lambda t\, y(t) = 0$, $\lambda = const.$

(Die DGL auf die Form $f(y)\,\mathrm{d}y = g(t)\,\mathrm{d}t$ bringen und beide Seiten nach y bzw. t integrieren. Integrationskonstanten nicht vergessen!) Man gebe die allgemeine Lösung $y(t)$ an, sowie die spezielle Lösung, die der Anfangsbedingung $y(0) = 2$ genügt.

3 Welche physikalischen Systeme könnten durch die folgenden Differentialgleichungen beschrieben werden? Gebe jeweils die allgemeine Lösung der DGL an.

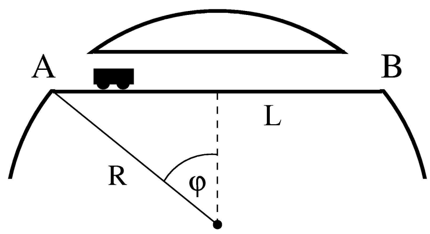
(i) $\ddot{x}(t) - g = 0$, (ii) $\ddot{M}(t) + \omega_0^2\, M(t) = 0$, (iii) $\dot{T}(t) + \lambda\, T(t) = 0$

4 Man versuche, analog zur Vorlesung, aus den folgenden Bewegungsgleichungen jeweils einen Energieerhaltungssatz abzuleiten. Falls die Energie erhalten ist, gebe man den Ausdruck für die Energie an; falls nicht: läßt sich dies physikalisch anhand der Bewegungsgl. verstehen?

a) (i) $\ddot{\varphi}(t) + \omega_0^2\, \varphi(t) = 0$, (ii) $m\ddot{x}(t) + c\,\dot{x} = 0$

b) (iii) $m\ddot{x}(t) - a\,t = 0$, (iv) $m\ddot{\mathbf{r}}(t) + D|\mathbf{r}|^2\mathbf{r} = 0$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$

5 In einem geradlinigen Tunnel der Länge L durch die Erde (Erdradius R) kann ein Wagen reibungsfrei rollen. Man nehme an, daß die Erdbeschleunigung $\mathbf{g}$ überall im Tunnel vom Betrag her gleich ist und zum Erdmittelpunkt zeigt.



a) Stelle die Newtonsche Bewegungsgleichung für den Wagen auf, mit dem Winkel $\varphi(t)$ als Koordinate. Es sei angenommen, daß $L \ll R$ und damit φ klein ist.

b) Man gebe die Lösung $\varphi(t)$ der Bewegungsgleichung an für den Fall, daß der Wagen am Punkt A zur Zeit $t = 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ losgelassen wird. Wie lange dauert die Fahrt von A nach B?

— Besprechung in den Übungsgruppen am Freitag, den 18.11.05 —