Theorie A (WS 2005/06)
Musterlösung Übungsblatt **3** 18.11.05

$\boxed{1}$ **a)** Einsetzen der Lösungen in die DGL:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi) \Rightarrow \ddot{x} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t - \varphi) = -\omega_0^2 x(t) \Rightarrow \surd$$

$$x(t) = B\sin(\omega_0 t - \theta) \Rightarrow \ddot{x} = -B\omega_0^2\sin(\omega_0 t - \theta) = -\omega_0^2 x(t) \Rightarrow \surd$$

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t) \Rightarrow \ddot{x} = -C\omega_0^2\cos(\omega_0 t) - D\omega_0^2\sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x(t) \Rightarrow \surd$$

b)

$$\text{(i):}\quad \left.\begin{array}{rcl} x(0) &=& A\cos(\varphi) = d \\ \dot{x}(0) &=& A\omega_0\sin(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A = d$$

Also lautet die spezielle Lösung (i): $x(t) = d\,\cos(\omega_0 t)\,.$

$$\text{(ii):}\quad \left.\begin{array}{rcl} x(0) &=& -B\sin(\theta) = d \\ \dot{x}(0) &=& B\omega_0\cos(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B = -d$$

Also lautet die spezielle Lösung (ii): $x(t) = -d\,\sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = d\,\cos(\omega_0 t)\,.$

$$\text{(iii):}\quad \begin{array}{rcl} x(0) &=& C = d \\ \dot{x}(0) &=& D\omega_0 = 0 \end{array}$$

Also lautet die spezielle Lösung (iii): $x(t) = d\,\cos(\omega_0 t)\,.$

c)

(i) = (ii): $A\cos(\omega_0 t - \varphi) = B\sin(\omega_0 t - \theta)$, $\cos(x) = \sin(x + \dfrac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow \quad A\sin(\omega_0 t - \varphi + \frac{\pi}{2}) = B\sin(\omega_0 t - \theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = A}\ , \quad \boxed{\theta = \varphi - \frac{\pi}{2}}$$

(i) = (iii): $A\cos(\omega_0 t - \varphi) = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t)$, $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

$$\Rightarrow \quad A\cos(\omega_0 t)\cos(\varphi) + A\sin(\omega_0 t)\sin(\varphi) = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C = A\cos(\varphi)}\ , \quad \boxed{D = A\sin(\varphi)}$$

(ii) = (iii): $B\sin(\omega_0 t - \theta) = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t)$, $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$

$$\Rightarrow \quad B\sin(\omega_0 t)\cos(\theta) - B\cos(\omega_0 t)\sin(\theta) = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \quad D = B\cos(\theta) \ , \quad C = -B\sin(\theta)$$

Ergebnis von (i) = (ii) noch einsetzen:

$$\Rightarrow \quad D = A\cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) \ , \quad C = -A\sin(\varphi - \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D = A\sin(\varphi)} \ , \quad \boxed{C = A\cos(\varphi)}$$

Also haben wir 4 Gleichungen bei 6 Unbekannten, also 2 unabhängige Konstanten in a), z.B. A und φ.

2

$$\dot{y} + \lambda\, t\, y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\lambda\, t\, y \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = (-\lambda\, t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad \int \mathrm{d}y\, \frac{1}{y} + const. = -\lambda \int \mathrm{d}t\, t + const.' \quad \Rightarrow \quad \ln(y) + A = -\lambda\frac{t^2}{2} + B$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \exp((B-A) - \frac{\lambda}{2}t^2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = D\, e^{-\frac{\lambda}{2}t^2}} \quad \text{mit} \quad D = e^{(B-A)}$$

Spezielle Lösung:

$$y(0) = D = 2 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 2\, e^{-\frac{\lambda}{2}t^2}$$

3 **(i):** $m\ddot{x} = mg$, freier Fall einer Masse m, Lösung ist bekannt: $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$.

(ii): $\ddot{M} + \omega_0^2 M = 0$, offenbar irgendein harmonischer Oszillator. Lösung steht in Aufg. 1 mit $x \to M$, z.B.: $M(t) = M_0\cos(\omega_0 t - \varphi)$.

(iii): $\dot{T} + \lambda\, T = 0$, irgendein Zerfallsprozess; Lösung (leicht durch Trennung der Veränderlichen zu berechnen): $T(t) = T_0 \exp(-\lambda\, t)$.

4 <u>**a)**</u>

$$\text{(i):} \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2\, \varphi = 0 \ \mid \cdot\, \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \omega_0^2\, \varphi\dot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\underbrace{\frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\, \varphi^2}_{=E}\right] = 0$$

Es gibt also eine Erhaltungsgröße 'Energie' E.

$$\text{(ii):} \quad m\ddot{x} + c\dot{x} = 0 \ \mid \cdot\, \dot{x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}\dot{x} + c(\dot{x})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}(\dot{x})^2 + ???\right] = 0$$

Der Term $c(\dot{x})^2$ läßt sich nicht als zeitliche Ableitung darstellen, da immer die innere Ableitung $\ddot{x}$ zusätzlich als Faktor auftreten würde. Energie ist keine Erhaltungsgröße; physikalisch: $c\dot{x}$ ist eine Reibungskraft.

b)

$$\text{(iii):}\quad m\ddot{x} - a\,t = 0 \;\;|\cdot\dot{x} \quad\Rightarrow\quad m\ddot{x}\dot{x} - at\dot{x} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 - atx\right] + ax(t) = 0$$

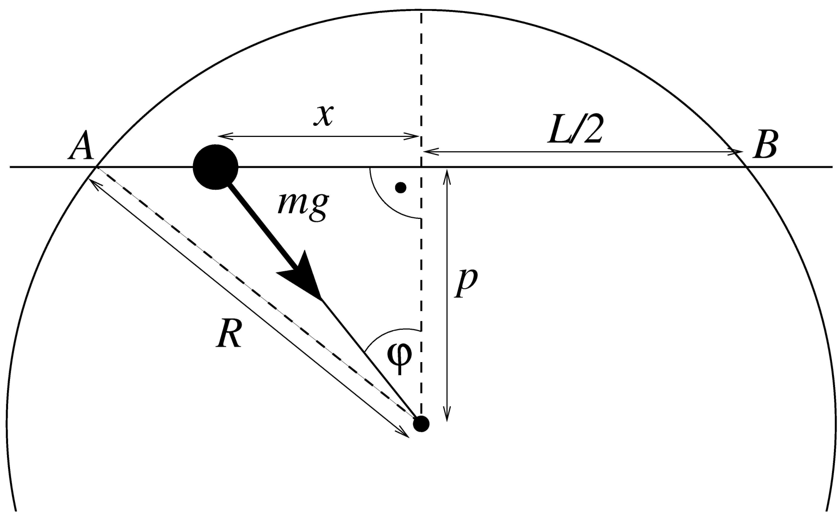
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E$ hängt offenbar von $x(t)$ und damit von t ab, ist also nicht erhalten. Grund: Kraft at explizit von der Zeit abhängig.

$$\text{(iv):}\; m\ddot{\mathbf{r}} + D|\mathbf{r}|^2\mathbf{r} = 0 \;\;|\cdot\dot{\mathbf{r}} \quad\Rightarrow\quad m\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} + D|\mathbf{r}|^2\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg[\underbrace{\frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{1}{4}D|\mathbf{r}|^4}_{=E}\Bigg] = 0$$

Im Detail:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{4}D|\mathbf{r}|^4\right] = \frac{D}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2+y^2+z^2)^2 = \frac{D}{4}\,2(x^2+y^2+z^2)(2x\dot{x}+2y\dot{y}+2z\dot{z}) = D\,|\mathbf{r}|^2\,\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$$

5



a) Rücktreibende Kraft: $F = -mg\,\sin(\varphi)$;

Beschleunigung: $a = \ddot{x}$, $x = p\,\tan(\varphi)$, $(L/2)^2 + p^2 = R^2 \quad\Rightarrow$

$x = \sqrt{R^2 - L^2/4}\,\tan(\varphi) \approx R\tan(\varphi)$

Im letzten Schritt wurde noch $L \ll R$ ausgenutzt, muß man aber nicht machen. Die entscheidende Näherung (konsistent zu $L \ll R$) ist jetzt $\varphi \approx 0$, also

$$\sin(\varphi) \approx \varphi \;,\quad \tan(\varphi) \approx \varphi \quad\Rightarrow\quad \ddot{x} = p\ddot{\varphi} \;,\quad m\ddot{x} = F \quad\Rightarrow\quad mp\ddot{\varphi} + mg\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\varphi} + \omega_0^2\,\varphi = 0} \quad , \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{p}}} \quad , \quad \boxed{p = \sqrt{R^2 - L^2/4} \approx R}$$

b) Allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Anfangsbedingungen:

$$x(0) = p\tan(\varphi(0)) = \frac{L}{2} \approx p\varphi(0) \quad \Rightarrow \quad \varphi(0) = \frac{L}{2p} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{L}{2p}$$

$$\dot{x}(0) = p\dot{\varphi}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi(t) = \frac{L}{2p}\cos(\omega_0 t)}$$

Dauer der Fahrt von A nach B ist gerade eine halbe Periode, also

$$T_{AB} = \frac{1}{2}T = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{p}{g}}$$