$\boxed{\mathbf{1}}$ Anschaulich: zwei Funktionen $ax_1(t)$, $bx_2(t)$ sind linear abhängig, wenn sie bei geeigneter Wahl der konstanten Vorfaktoren a, b für alle t aufeinander liegen. Damit lassen sich die folgenden Ergebnisse sehr leicht überprüfen.

a)

$$\text{(i):}\quad \Delta(t) = \begin{vmatrix} at & \frac{1}{2}bt^2 \\ a & bt \end{vmatrix} = abt^2 - \frac{1}{2}abt^2 = \frac{1}{2}abt^2$$

Also ist $\Delta(t) \neq 0$ (außer für $t = 0$) $\quad\Rightarrow\quad$ linear unabhängig.

$$\text{(ii):}\quad \Delta(t) = \begin{vmatrix} \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \\ \omega_0 \cos(\omega_0 t) & -\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{vmatrix} = -\omega_0[\,\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)\,] = -\omega_0 \neq 0$$

$\Rightarrow\quad$ linear unabhängig.

$$\text{(iii):}\quad \Delta(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda t} & e^{\gamma t} \\ \lambda e^{\lambda t} & \gamma e^{\gamma t} \end{vmatrix} = (\gamma - \lambda)e^{(\lambda+\gamma)t} = 0 \quad \text{nur für} \;\; \gamma = \lambda$$

$\Rightarrow\quad$ linear abhängig, falls $\lambda = \gamma$, sonst lin. unabhängig.

b)

$$\text{(iv):}\quad \Delta(t) = \begin{vmatrix} t^n & t^m \\ nt^{n-1} & mt^{m-1} \end{vmatrix} = t^{(n+m-1)}(m-n) = 0 \quad \text{nur für} \;\; n = m$$

$$\begin{aligned} \text{(v):}\quad \Delta(t) \quad &= \begin{vmatrix} \sin(n\omega_0 t) & \sin(m\omega_0 t) \\ n\omega_0 \cos(n\omega_0 t) & m\omega_0 \cos(m\omega_0 t) \end{vmatrix} \\ &= \omega_0[\, m \sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t) - n\cos(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,] \\ &= 0 \quad \text{für alle } t \text{ nur für} \quad n = m \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Exponentialansatz:

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad\Rightarrow\quad \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \quad\Rightarrow\quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \quad\Rightarrow\quad \ldots$$

a)

(i): $\dot{x} + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-2t}$

Nur eine Lösung, da 1. Ordnung; allgemeine Lösung: $\boxed{x(t) = C\,e^{-2t}}$

(ii): $\ddot{x}+3\dot{x}+2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2+3\lambda+2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -2 \;, \quad \lambda_2 = -1$

2 linear unabhängige Lösungen (siehe Aufg. 1 a) (iii))

$$x_1(t) = e^{-2t} \;, \quad x_2(t) = e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t}}$$

b)

(iii): $\dddot{x} - 7\dot{x} + 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$

Raten: $\lambda_1 = 1$. Jetzt Polynomdivision oder Ansatz mit Koeffizientenvergleich:

$$(\lambda-1)(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^3 + (p-1)\lambda^2 + (q-p)\lambda - q = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 1 \;, \quad q = -6$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 2 \;, \quad \lambda_3 = -3$$

Also wie verlangt drei linear unabhängige Lösungen, die allgemeine lautet damit

$$\boxed{x(t) = Ae^{t} + Be^{2t} + Ce^{-3t}}$$

3 **a)**

$$f(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = Ae^{-t}$$

$$f(t) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Ansatz: } x(t) = W(t)e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \dot{W}(t)e^{-t} - W(t)e^{-t}$$

Einsetzen in DGL mit $f(t)$

$$\dot{x} + x = f(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{W}(t)e^{-t} - W(t)e^{-t} + x(t) = f(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{W}(t) = f(t)e^{+t}}$$

b) $W(t)$ läßt sich im Prinzip für beliebiges $f(t)$ einfach durch Integration (Stammfunktion plus Integrationskonstante) bestimmen; hier:

$$W(t) = \int \mathrm{d}t\, f(t)\, e^{t} + const. \quad \Rightarrow \quad W(t) = \int \mathrm{d}t\, \sin(\omega t)\, e^{t} + W_0$$

Partielle Integration:

$$\int \mathrm{d}t\, \underbrace{\sin(\omega t)}_{v(t)}\, \underbrace{e^{t}}_{\dot{u}(t)} = \sin(\omega t)\, e^{t} - \omega \int \mathrm{d}t\, \cos(\omega t)\, e^{t}$$

Nochmal:

$$\int \mathrm{d}t\, \underbrace{\cos(\omega t)}_{v(t)}\, \underbrace{e^t}_{\dot{u}(t)} = \cos(\omega t)\, e^t + \omega \int \mathrm{d}t\, \sin(\omega t)\, e^t$$

Zusammen

$$\Rightarrow \quad (1+\omega^2) \int \mathrm{d}t\, \sin(\omega t)\, e^t = [\,\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)\,]e^t$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W(t) = \frac{e^t}{1+\omega^2}[\,\sin(\omega t) - \omega\, \cos(\omega t)\,] + W_0}$$

Die allgemeine Lösung lautet damit

$$\boxed{x(t) = W(t)e^{-t} = W_0 e^{-t} + \frac{1}{1+\omega^2}[\,\sin(\omega t) - \omega\, \cos(\omega t)\,]}$$

Anfangsbedingung:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad W_0 = \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

also die zpezielle Lösung:

$$\boxed{x(t) = \frac{\omega}{1+\omega^2}\left[e^{-t} + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\right]}$$

$\boxed{4}$ **a)**

$$z_1 = 3 - 5i \;, \quad z_2 = -1 + 2i$$

$$\bar{z}_1 = 3 + 5i \;, \quad \bar{z}_2 = -1 - 2i$$

$$|z_1| = \sqrt{\bar{z}_1 z_1} = \sqrt{(3+5i)(3-5i)} = \sqrt{9 - 25(i)^2} = \sqrt{34}$$

$$|z_2| = \sqrt{\bar{z}_2 z_2} = \sqrt{(-1-2i)(-1+2i)} = \sqrt{1 - 4(i)^2} = \sqrt{5}$$

$$z_1 + z_2 = 2 - 3i$$

$$z_1 z_2 = (3-5i)(-1+2i) = -3 - 10(i)^2 + 6i + 5i = 7 + 11i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{\bar{z}_2 z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{1}{5}z_1\bar{z}_2 = \frac{1}{5}(3-5i)(-1-2i) = \frac{1}{5}(-13-1i) = -\frac{13}{5} - \frac{1}{5}i$$

b)

$$z_1 = x + iy \;, \quad z_2 = u + iv \quad \Rightarrow \quad \bar{z}_1 = x - iy \;, \quad \bar{z}_2 = u - iv$$

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (x+u) + i(y+v) \\
\Rightarrow \quad \overline{(z_1 + z_2)} &= (x+u) - i(y+v) = (x - iy) + (u - iv) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (x+iy)(u+iv) = (xu - yv) + i(yu + xv) \\
\Rightarrow \quad \overline{(z_1 z_2)} &= (xu - yv) - i(yu + xv) = (x - iy)(u - iv) = \bar{z}_1 \bar{z}_2
\end{aligned}
$$

$$|z| = \sqrt{\bar{z}z} \quad \Rightarrow \quad |\bar{z}| = \sqrt{\bar{\bar{z}}\bar{z}} = \sqrt{z\bar{z}} = |z| \qquad \text{mit} \quad \bar{\bar{z}} = z$$

c)

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i$$