Universität Karlsruhe WS 2005/06
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle , Dr. Jan Brinckmann **25.11.05**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre theorie-a@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochh. Zi. 10.13

Übungsblatt Nr. 5 zur Vorlesung Theorie A

$\boxed{1}$ Stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x + iy$ und in der Form $z = r\,e^{i\varphi}$ dar, gebe jeweils auch $\bar{z}$ auf beide Arten an:

a) $z = 1 + i$, $z = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}i}$, $z = \dfrac{1}{i}$ **b)** $z = -\sqrt{3} + i$, $z = (1+i)^2$

$\boxed{2}$ Die Eulersche Formel lautet $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

a) Benutze die Eulersche Formel, um $\cos(x)$ und $\sin(x)$ durch e^{ix} und e^{-ix} auszudrücken. (Es gilt $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$!)

b) Verwende die Eulersche Formel, um die folgenden Additionstheoreme zu beweisen:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Was ergibt $\cos(i\,x)$ bzw. $\sin(i\,x)$?

$\boxed{4}$ Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden DGLs über den Exponentialansatz $z(t) = e^{\lambda t}$, wobei $\lambda \in \mathcal{C}$ komplex sein darf. Bestimme auch die spezielle Lösung zu den angegebenen Anfangsbedingungen, wobei $x_0, v_0 = const.$

a) $\ddot{z}(t) + 4z(t) = 0$, Anfangsbed.: $z(0) = x_0$, $\dot{z}(0) = 0$

b) $\ddot{z}(t) - 4\dot{z}(t) + 5z(t) = 0$, Anfangsbed.: $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = v_0$

c) $\ddot{z}(t) + 4\dot{z}(t) + 13z(t) = 0$, Anfangsbed.: $z(0) = x_0$, $\dot{z}(0) = 0$

$\boxed{5}$ In einem mathematischen Fadenpendel (Punktmasse m , Erdbeschleunigung g , Länge des Fadens l) wirkt durch die Luftreibung eine Kraft $\mathbf{F}_R = -2m\gamma\mathbf{v}$ proportional und entgegengesetzt zur momentanen Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ der Punktmasse ($\gamma = const.$).

a) Man stelle die Bewegungsgleichung für den Auslenkungswinkel $\varphi(t)$ aus der Ruhelage auf, und nähere diese für kleine Auslenkung $\varphi \approx 0$.

b) Bestimme die allgemeine Lösung $\varphi(t)$ über den komplexen Exponentialansatz $\varphi(t) = e^{\lambda t}$. Man nehme also zunächst einmal an, daß $\varphi(t) \in \mathcal{C}$.
Dabei sollen 2 Fälle unterschieden werden: (i) $\gamma^2 < \dfrac{g}{l}$ (ii) $\gamma^2 > \dfrac{g}{l}$.

c) Bestimme nun für die Fälle (i), (ii) die spezielle Lösung $\varphi(t)$, die den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{l}$ genügt. $v_0 > 0$ ist die Anfangsgeschwindigkeit des Pendels, also reell, $v_0 \in \mathcal{R}$. Ist die spezielle Lösung $\varphi(t)$ für alle t reell ? Muß das so sein ?

d) Skizziere die spezielle Lösung $\varphi(t)$ für (i), (ii) . Wo liegen Nulldurchgänge von $\varphi(t)$, wie verläuft $\varphi(t)$ für kleine Zeiten $t \approx 0$ und für große $t \to \infty$?

— Besprechung in den Übungsgruppen am Freitag, den 02.12.05 —