Theorie A (WS 2005/06)
Musterlösung Übungsblatt **5** 02.12.05

---

1 **a)**

(i): $z = (1+i) \;\;,\;\; r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2} \;\;,\;\; \varphi = 45^o \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

(ii): $z = \dfrac{1}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+3} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}i \;\;,\;\; r = \dfrac{1}{2} \;\;,\;\; \varphi = \arctan(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad z = \dfrac{1}{2}e^{-i\pi/3} = \dfrac{1}{2}e^{i5\pi/3}$

(iii): $z = \dfrac{1}{i} = \dfrac{-i}{i(-i)} = -i \;\;,\;\; r = 1 \;\;,\;\; \varphi = -90^o = -\dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad z = e^{-i\pi/2} = e^{i3\pi/2}$

b)

(iv): $z = -\sqrt{3} + i \;\;,\;\; r = \sqrt{3+1} = 2 \;\;,\;\; \varphi = \pi - \arctan(\dfrac{1}{\sqrt{3}}) = \dfrac{\pi}{2} + \arctan(\sqrt{3}) = \dfrac{5}{6}\pi$

$\Rightarrow \quad z = 2e^{i5\pi/6}$

(v): $z = (1+i)^2 = 1 - 1 + 2i = 2i \;\;,\;\; r = 2 \;\;,\;\; \varphi = 90^o = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad z = 2e^{i\pi/2}$

2 **a)**

Euler: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \quad \Rightarrow \quad e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$

Summe und Differenz beider Forneln bilden:

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x) \;\;,\;\; e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x)$$

$$\Rightarrow \quad \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \;\;,\;\; \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

b) 2mal Euler-Formel:

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i\sin(x+y) \;\;, \\ e^{i(x+y)} &= e^{ix}e^{iy} = \big(\cos(x) + i\sin(x)\big)\big(\cos(y) + i\sin(y)\big) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(x+y) + i\sin(x+y) = [\,\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\,] + i[\,\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\,]$$

Eine komplexe Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn Real- *und* Imaginärteil linke und rechts gleich sind $\quad\Rightarrow\quad$ die beiden Additionstheoreme.

$\boxed{\mathbf{3}}$

$$\begin{aligned}
\cos(ix) &= \frac{1}{2}(e^{i(ix)} + e^{-i(ix)}) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) = \cosh(x) \\
\sin(ix) &= \frac{1}{2i}(e^{i(ix)} - e^{-i(ix)}) = \frac{1}{2i}(e^{-x} - e^{x}) = \frac{i}{2}(e^{x} - e^{-x}) = i\sinh(x)
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ **a)**

$$z(t) = e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \dot{z}(t) = \lambda e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{z}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Einsetzen:

$$\ddot{z} + 4z = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm i\sqrt{4} = \pm 2i$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = Ae^{i2t} + Be^{-i2t}$$

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
\dot{z}(0) &= 0 = 2i(A - B) \quad \Rightarrow \quad A = B \\
z(0) &= x_0 = (A + B) \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2A
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A = B = \frac{x_0}{2} \quad \Rightarrow \quad z(t) = \frac{x_0}{2}(e^{i2t} + e^{-i2t}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{z(t) = x_0\cos(2t)}$$

b)

$$\ddot{z} - 4\dot{z} + 5z = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 \pm \sqrt{4 - 5} = 2 \pm i$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = e^{2t}(Ae^{it} + Be^{-it})$$

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
z(0) &= 0 = (A + B) \quad \Rightarrow \quad B = -A \\
\dot{z}(0) &= v_0 = 2(A + B) + i(A - B) = i\,2A
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{v_0}{2i} \;, \quad B = -\frac{v_0}{2i} \quad \Rightarrow \quad z(t) = v_0 e^{2t}\frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{z(t) = v_0 e^{2t}\sin(t)}$$

c)

$$\ddot{z} + 4\dot{z} + 13z = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm 3i$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = e^{-2t}(Ae^{i3t} + Be^{-i3t})$$

Anfangsbedingungen:

$$\left.\begin{array}{rcl} z(0) & = & x_0 = (A+B) \\ \dot{z}(0) & = & 0 = -2(A+B) + 3i(A-B) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A = x_0\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i\right) \quad , \quad B = x_0\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right)$$

(Gleichungssystem auflösen im letzten Shritt ...)

$$\Rightarrow \quad z(t) = x_0 e^{-2t}\left[\frac{1}{2}\underbrace{(e^{-i3t} + e^{i3t})}_{=2\cos(3t)} + \frac{i}{3}\underbrace{(e^{-i3t} - e^{i3t})}_{=-2i\sin(3t)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{z(t) = x_0 e^{-2t}[\cos(3t) + \frac{2}{3}\sin(3t)]}$$

$\boxed{5}$ **a)** Bahngeschwindigkeit auf der Kreisbahn der Punktmasse: $v = l\dot{\varphi}$.
Beschleunigung: $a = \dot{v} = l\ddot{\varphi}$.
Rücktreibende Kraf: $F = -mg\sin(\varphi)$.
Reibungskraft: $F_R = -2m\gamma v = -2m\gamma l\dot{\varphi}$.
Newton:

$$ml\ddot{\varphi} = -2m\gamma l\dot{\varphi} - mg\sin(\varphi)$$

Kleine Auslenkungen: $sin(\varphi) \approx \varphi \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\ddot{\varphi}(t) + 2\gamma\dot{\varphi}(t) + \omega_0^2\varphi(t) = 0 \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}}$$

b) Ansatz: $\varphi(t) = e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$$

Unterscheide schwache und starke Dämpfung:

$$\begin{array}{lll} \text{(i):} \quad \gamma^2 < \omega_0^2 & \Rightarrow & \lambda = -\gamma \pm i\Omega \quad , \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} > 0 \in \mathcal{R} \\ \text{(ii):} \quad \gamma^2 > \omega_0^2 & \Rightarrow & \lambda = -\gamma \pm \Gamma \quad , \quad \Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0 \in \mathcal{R} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow \quad \text{(i):} \quad \varphi(t) = & e^{-\gamma t}(Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}) \\ \Rightarrow \quad \text{(ii):} \quad \varphi(t) = & e^{-\gamma t}(Ce^{\Gamma t} + De^{-\Gamma t}) \end{array}$$

c) Anfangsbedingungen:

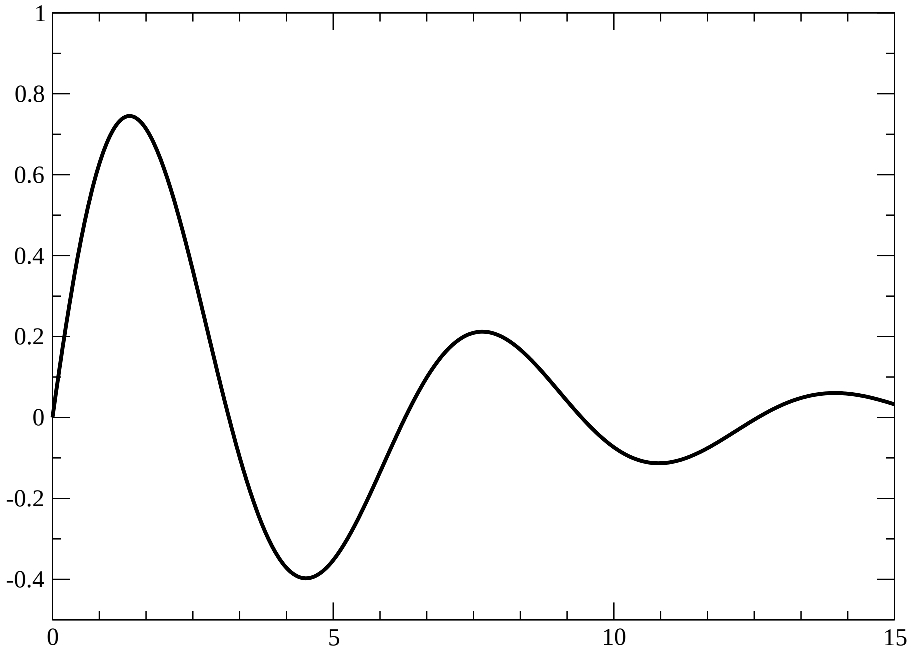
(i): $$\left.\begin{array}{rcl}\varphi(0) & = & 0 = (A+B) \\ \dot\varphi(0) & = & \dfrac{v_0}{l} = -\gamma(A+B) + i\Omega(A-B)\end{array}\right\} \Rightarrow \quad A = \frac{v_0}{l}\frac{1}{2i\Omega} \quad , \quad B = -\frac{v_0}{l}\frac{1}{2i\Omega}$$

(ii): $$\left.\begin{array}{rcl}\varphi(0) & = & 0 = (C+D) \\ \dot\varphi(0) & = & \dfrac{v_0}{l} = -\gamma(C+D) + \Gamma(C-D)\end{array}\right\} \Rightarrow \quad C = \frac{v_0}{l}\frac{1}{2\Gamma} \quad , \quad D = -\frac{v_0}{l}\frac{1}{2\Gamma}$$

$$\Rightarrow \quad \text{(i):} \quad \boxed{\varphi(t) = \frac{v_0}{l}\frac{1}{\Omega}e^{-\gamma t}\frac{1}{2i}(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}) = \frac{v_0}{l\Omega}e^{-\gamma t}\sin(\Omega t)}$$

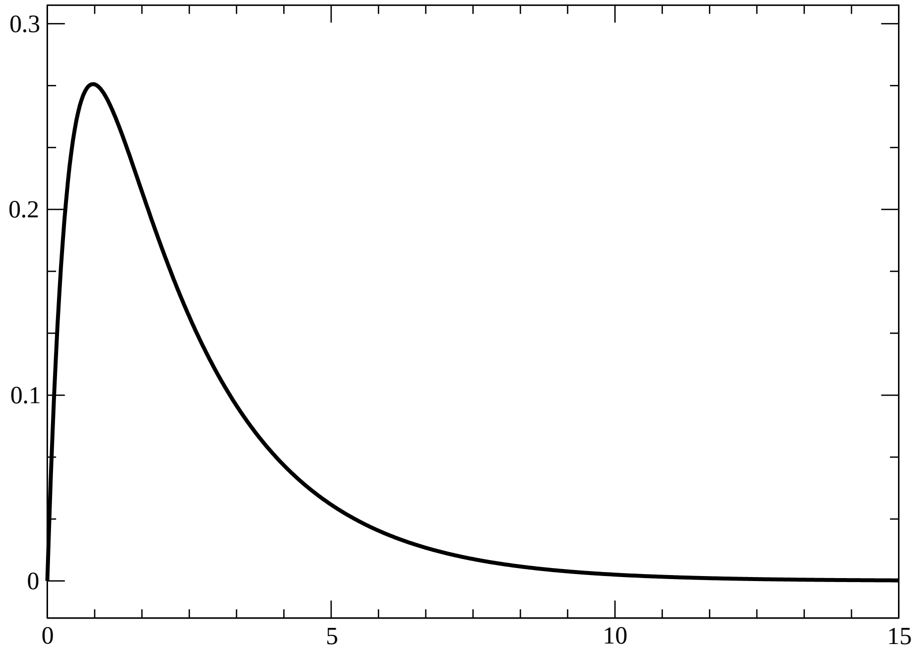
$$\Rightarrow \quad \text{(ii):} \quad \boxed{\varphi(t) = \frac{v_0}{l}\frac{1}{\Gamma}e^{-\gamma t}\frac{1}{2}(e^{\Gamma t} - e^{-\Gamma t}) = \frac{v_0}{l\Gamma}e^{-\gamma t}\sinh(\Gamma t)}$$

d) Fall (i) als Funktion von (Ωt) mit $\gamma = 0.2\,\Omega$:



Für kleine $t \to 0$ gilt natürlich die Anfangsbedingung, also ist $\varphi(t)$ da eine Gerade mit der Steigung v_0/l (im Plot ist $\frac{v_0}{l\Omega} = 1$ gesetzt). Für $t \to \infty$ unterdrückt die e-Funktion alles, also $\varphi(t) \to 0$. Nullstellen sind bei $\Omega t = n\,\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ für $t \geq 0$.

Fall (ii) als Funktion von (Γt) mit $\gamma = 1.5\,\Gamma$:



Für kleine $t \to 0$ gilt natürlich die Anfangsbedingung, also ist $\varphi(t)$ da eine Gerade mit der Steigung v_0/l (im Plot ist $\frac{v_0}{l\Gamma} = 1$ gesetzt). Für $t \to \infty$ wird der $\sinh(\Gamma t) \approx \frac{1}{2} e^{\Gamma t}$, aber da $\Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < \gamma$, unterdrückt die e-Funktion wieder alles, also $\varphi(t) \to 0$. Nullstellen gibt's keine.