Universität Karlsruhe WS 2005/06
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann **02.12.05**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre theorie-a@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochh. Zi. 10.13

Übungsblatt Nr. 6 zur Vorlesung Theorie A

1 Die "δ-Funktion" $\delta(x)$ kann durch den Grenzwert $\varepsilon \to 0$ einer glatten Funktion $\delta_\varepsilon(x)$ dargestellt werden. Es gilt also

$$(1) \quad \delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad x = 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \neq 0 \end{cases} \qquad (2) \quad \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, \delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, \delta_\varepsilon(x) = 1$$

für beliebiges $a > 0$. Man mache sich für die folgenden $\delta_\varepsilon(x)$ den Prozess $\varepsilon \to 0$ und damit (1) anschaulich klar (Skizze, Plot) und überprüfe (2):

a) $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{für} \quad |x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{für} \quad |x| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$ **b)** $\delta_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$ **c)** $\delta_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{\varepsilon} e^{-x^2/\varepsilon^2}$

(Substitution, Integraltabelle; $a/\varepsilon \to \infty$).

2 Die "δ-Funktion" ist definiert durch $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\, \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls} \quad x_0 \in [\,a, b\,] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Berechne damit

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x^2}\, \delta(x+1)\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, [\, f(x) - f(0)\,]\, \delta(x - a)\,, \qquad F(t_0) = \int_0^T \mathrm{d}t\, \cos^2(\omega t)\, \delta(t - t_0)$$

3 Der ungedämpfte harmonische Oszillator mit externer Kraft genügt der Bewegungsgleichung $\ddot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = f(t)$. Bestimme die allgemeine Lösung $x(t)$ dieser inhomogenen DGL, sowie die spezielle Lösung für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0\,, \dot{x}(0) = 0$ für die folgenden Kraftausdrücke. $x(t)$ sei reell angenommen.

a) $f(t) = f_0\, e^{-\alpha t}$ **b)** $f(t) = f_0\, \cos(\omega t)$ **c)** $f(t) = f_0\, \sin^2(\omega t)$ mit $\omega \neq \omega_0, \dfrac{\omega_0}{2}$

(Die allgemeine Lösung $x(t)$ ist $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ mit der allgemeinen Lösung $x_h(t)$ der homogenen DGL ($f(t) = 0$) und einer partikulären Lösung $x_p(t)$ der inhomogenen DGL ($f(t) \neq 0$). Um ein $x_p(t)$ zu finden, macht man hier einen "Ansatz vom Typ der rechten Seite" und setzt diesen in die inhomogene DGL ein.)

4 Der schwach gedämpfte ($\gamma^2 < \omega_0^2$) harmonische Oszillator mit externer Kraft genügt der Bewegungsgleichung $\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$.

a) Man bestimme die allgemeine Lösung $x(t)$ für eine konstante Kraft $f(t) = f_0$. (Exponentialansatz für $x_h(t)$, dann $x_p(t)$ suchen.) $x(t) \in \mathcal{C}$ sei komplex angenommen.

b) Die Sprungantwort des Systems erhält man mit $f(t) = \begin{cases} f_0 & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$.
Bestimme dafür die spezielle Lösung für $t \geq 0$ und für $t < 0$, zu den Anfangsbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, und skizziere den qualitativen Verlauf.

— Besprechung in den Übungsgruppen am Freitag, den 09.12.05 —