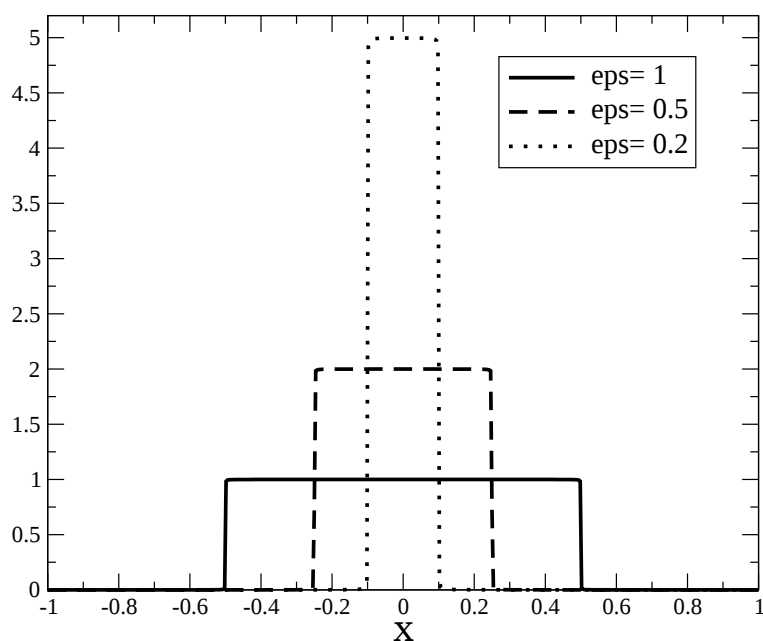


1 a)

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } |x| < \varepsilon/2 \\ 0 & \text{für } |x| > \varepsilon/2 \end{cases}$$

Plot:



Gleichung (2) (Normierung):

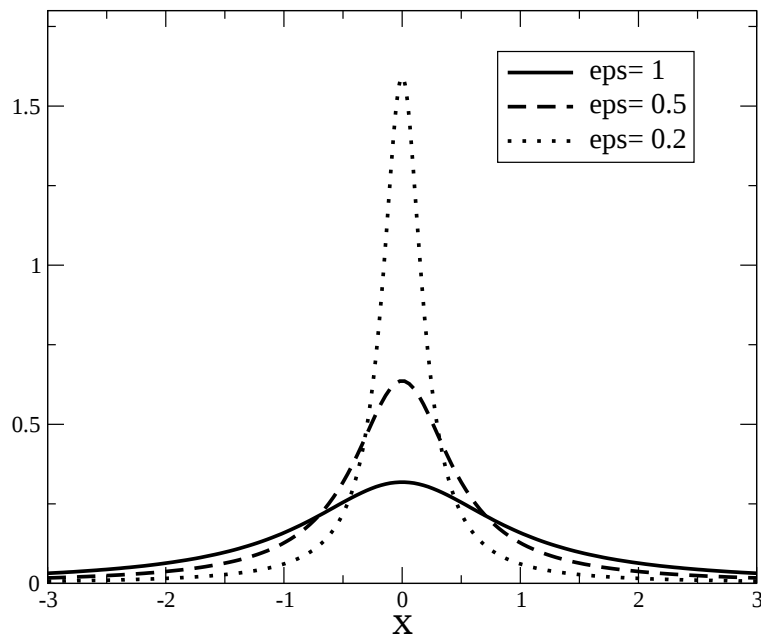
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^a dx \delta_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} dx = 1$$

denn unter dem $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ kann $a > \varepsilon$ angenommen werden, für beliebiges $a > 0$.

b)

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

Plot:



Gleichung (2) (Normierung):

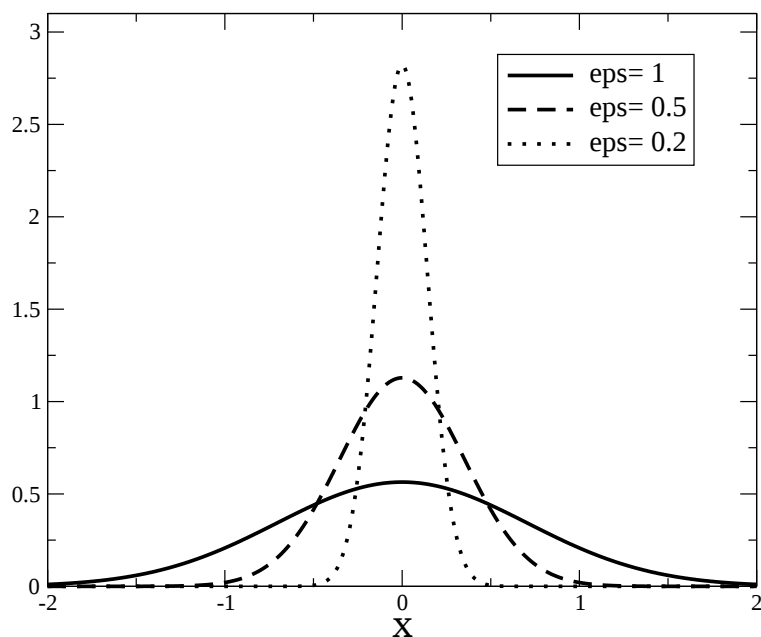
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^a dx \delta_{\varepsilon}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^a dx \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{1}{x^2 + \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} dt \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) = 1$$

mit $t = \frac{x}{\varepsilon}$, Bronstein und $\arctan(-x) = -\arctan(x)$, $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$.

c)

$$\delta_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \varepsilon} e^{-x^2/\varepsilon^2}$$

Plot:



Gleichung (2) (Normierung):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^a dx \delta_{\varepsilon}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^a dx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-x^2/\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} dt \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} = 1$$

mit $t = x/\varepsilon$ und Integraltabelle (Bronstein).

2

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x^2} \delta(x+1) = 0, \quad \text{denn } x = -1 \text{ liegt außerhalb des Integrationsbereiches.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx [f(x) - f(0)] \delta(x-a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x-a) - f(0) \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-a) = f(a) - f(0)$$

$$\int_0^T dt \cos^2(\omega t) \delta(t-t_0) = \begin{cases} \cos^2(\omega t_0) & \text{für } 0 \leq t_0 < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

3

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL mit $f(t) = 0$ lautet

$$x_h(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$$

a)

$$f(t) = f_0 e^{-\alpha t} \Rightarrow \text{Ansatz: } x_p(t) = a e^{-bt} \Rightarrow \ddot{x}_p(t) = ab^2 e^{-bt}$$

Einsetzen:

$$(ab^2 + a\omega_0^2)e^{-bt} = f_0 e^{-\alpha t} \Rightarrow b = \alpha$$

$$(ab^2 + a\omega_0^2) = f_0 \Rightarrow (a\alpha^2 + a\omega_0^2) = f_0 \Rightarrow a = \frac{f_0}{\omega_0^2 + \alpha^2}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet damit:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 + \alpha^2} e^{-\alpha t}$$

Spezielle Lösung für die Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 = B + \frac{f_0}{\omega_0^2 + \alpha^2} \quad , \quad \dot{x}(0) = 0 = A\omega_0 - \alpha \frac{f_0}{\omega_0^2 + \alpha^2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\alpha}{\omega_0} \frac{f_0}{\omega_0^2 + \alpha^2} \quad , \quad B = -\frac{f_0}{\omega_0^2 + \alpha^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 + \alpha^2} \left[\frac{\alpha}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t) + e^{-\alpha t} \right]}$$

Interessant ist noch der Grenzfall $\alpha = 0$: dies ergibt die Sprungantwort des ungedämpften Oszillators, die so auch aus Aufg. 4 b) als Spezialfall rauskommen sollte:

$$\alpha = 0 \leftrightarrow f(t) = f_0 : \quad x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2} [1 - \cos(\omega_0 t)]$$

b)

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \text{Ansatz: } x_p(t) = a \cos(bt) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_p(t) = -ab^2 \cos(bt)$$

Einsetzen:

$$(-ab^2 + a\omega_0^2) \cos(bt) = f_0 \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad b = \omega$$

$$(-ab^2 + a\omega_0^2) = f_0 \quad \Rightarrow \quad (-a\omega^2 + a\omega_0^2) = f_0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

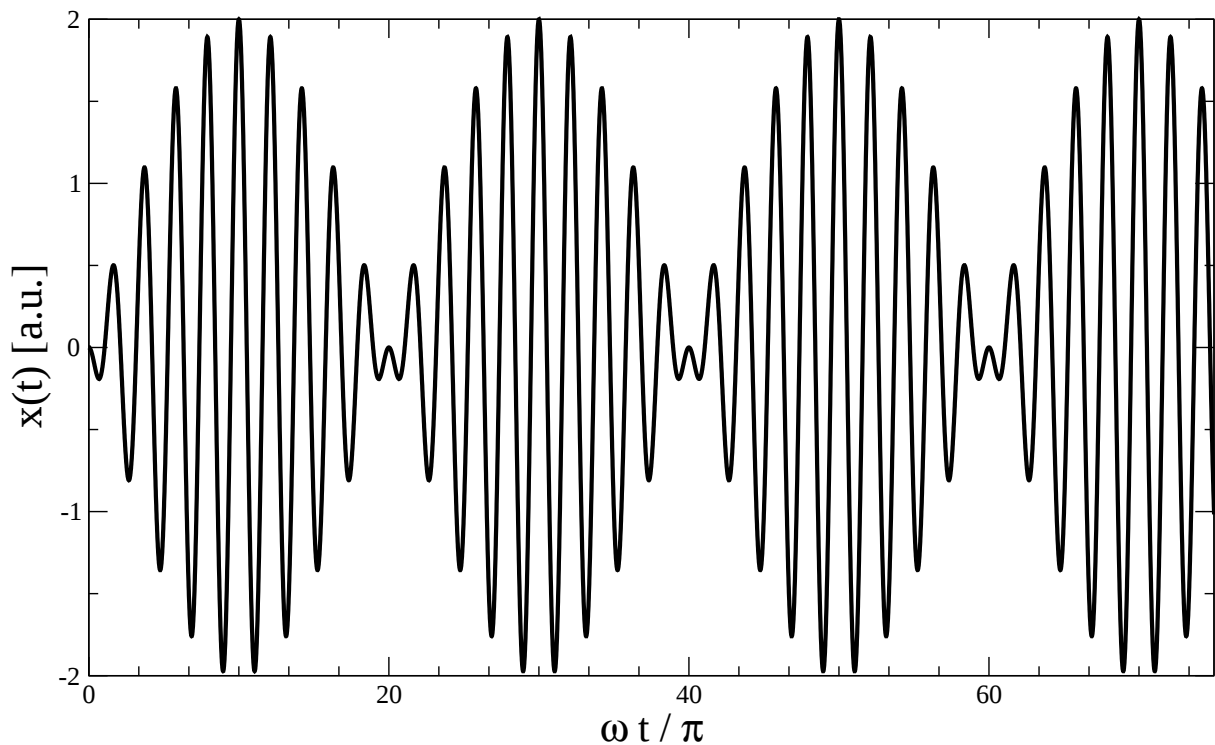
Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad , \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

Spezielle Lösung:

$$\boxed{x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)]}$$

Plot für $\omega_0 = 0.9 \omega$ (mit $f_0/(\omega_0^2 - \omega^2) \equiv 1$ gesetzt) als Funktion von ωt :



(Man beachte, daß hier auch für große Zeiten $t \rightarrow \infty$ die Eigenfrequenz ω_0 noch eingeht, weil keine Dämpfung da ist. In der Vorlesung (gedämpfter Oszillator mit $f(t) = f_0 e^{i\omega t}$) taucht ω_0 nicht mehr auf, weil die homogene Lösung bei $t \rightarrow \infty$ verschwunden ist, und nur noch $x_p(t)$ zu sehen ist. Unser Vorfaktor $1/(\omega_0^2 - \omega^2)$ ist gerade die Antwortfunktion aus der Vorlesung, im Limes $\gamma \rightarrow 0$:

Mit Dämpfung (Vorlesung), $t \rightarrow \infty$:
$$x(t) = x_p(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} e^{i\omega t}$$

c)

$$f(t) = f_0 \sin^2(\omega t) \Rightarrow \text{Ansatz: } x_p(t) = a \sin^2(bt) \Rightarrow$$

$$\ddot{x}_p(t) = 2ab^2 [\cos^2(bt) - \sin^2(bt)] = 2ab^2 - 4ab^2 \sin^2(bt)$$

Einsetzen:

$$2ab^2 + (-4ab^2 + a\omega_0^2) \sin^2(bt) = f_0 \sin^2(\omega t)$$

Der konstante Term stört etwas ... Ansatz erweitern:

$$\text{Neuer Ansatz: } x_p(t) = a \sin^2(bt) + c \Rightarrow \ddot{x}_p(t) = \text{wie oben}$$

Einsetzen:

$$(2ab^2 + \omega_0^2 c) + (-4ab^2 + a\omega_0^2) \sin^2(bt) = f_0 \sin^2(\omega t)$$

$$\Rightarrow c = -\frac{2ab^2}{\omega_0^2}, \quad b = \omega, \quad a = \frac{f_0}{\omega_0^2 - 4b^2}$$

Also lautet die partikuläre Lösung

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - 4\omega^2} \left[\sin^2(\omega t) - 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]$$

Daraus folgt die allgemeine Lösung und mit den Anfangsbedingungen die spezielle:

$$x(0) = 0 = B + \frac{f_0}{\omega_0^2 - 4\omega^2} \left[-2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right], \quad \dot{x}(0) = 0 = \omega_0 A$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - 4\omega^2} \left[\sin^2(\omega t) + \frac{2\omega^2}{\omega_0^2} (\cos(\omega_0 t) - 1) \right]}$$

4 a) Homogene Lösung (hatten wir schon auf Blatt 5):

$$\text{Ansatz: } x_h(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}_h(t) = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x}_h(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Schwache Dämpfung:

$$\gamma^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \lambda = -\gamma \pm i\Omega, \quad \boxed{\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

also die allgemeine homogene Lösung:

$$\boxed{x_h(t) = e^{-\gamma t} (Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t})}$$

Die partikuläre Lösung für $f(t) = f_0$ ist billig:

$$\boxed{x_p(t) = \text{const.} = \frac{f_0}{\omega_0^2}}$$

Die allgemeine Lösung ist natürlich $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.

b) $t \geq 0$: Die allgemeine Lösung ist die aus **a)**; Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 = (A + B) + \frac{f_0}{\omega_0^2}, \quad \dot{x}(0) = 0 = -\gamma(A + B) + i\Omega(A - B)$$

$$\Rightarrow A = -\frac{f_0}{2\omega_0^2} \left(1 + \frac{\gamma}{i\Omega} \right), \quad B = -\frac{f_0}{2\omega_0^2} \left(1 - \frac{\gamma}{i\Omega} \right)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\gamma t} \left(\underbrace{\frac{1}{2} [e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}]}_{=\cos(\Omega t)} + \frac{\gamma}{\Omega} \underbrace{\frac{1}{2i} [e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}]}_{=\sin(\Omega t)} \right) \right]$$

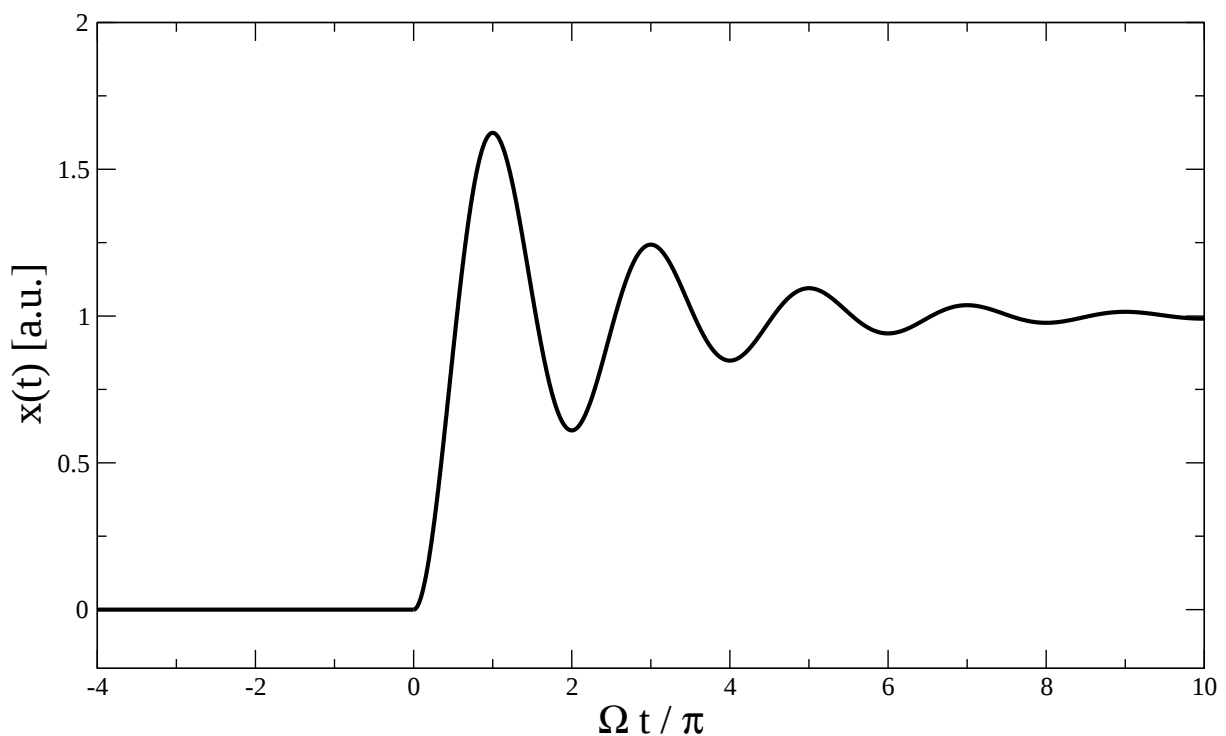
$$\Rightarrow \quad t \geq 0 : \quad x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\gamma t} \left\{ \cos(\Omega t) + \frac{\gamma}{\Omega} \sin(\Omega t) \right\} \right]$$

$t < 0$: Hier ist $f(t) = 0$, also ist die allgemeine Lösung die der homogenen Gleichung, und mit den Anfangsbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ergibt das

$$t < 0 : \quad x(t) = 0$$

Ist auch logisch, denn bei *diesen* Anfangsbedingungen (der Oszillator ist in Ruhe) wird erst durch den Kraftsprung bei $t = 0$ dem System Energie zugeführt.

Plot für $\gamma = 0.15 \Omega$ (mit $f_0/\omega_0^2 \equiv 1$ gesetzt):



(Zum Vergleich mit der Randbemerkung bei Aufg. 3 a) kann man noch den ungedämpften Grenzfall $\gamma = 0$ betrachten: Mit $\Omega \rightarrow \omega_0$ kommt wie erwartet dasselbe raus,

$$\gamma = 0, \quad t \geq 0 : \quad x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2} [1 - \cos(\omega_0 t)]$$