Übungsblatt Nr. 7 zur Vorlesung Theorie A

1 Die "Sprungfunktion" (Θ-Funktion) ist definiert durch $\Theta(t-t') = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t \geq t' \\ 0 & \text{für} \quad t < t' \end{cases}$.

Zeige, daß gilt: $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Theta(t-t') = \delta(t-t')\,, \tag{1}$$

verwende dabei die Darstellung der Θ-Funktion: $\Theta(t-t') = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}[\,\arctan(\frac{t-t'}{\varepsilon}) + \frac{\pi}{2}\,]$.

Man mache sich damit $\Theta(t-t')$ und deren Ableitung anschaulich klar.

2 Betrachte den gedämpften harmonischen Oszillator, $\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$ mit $\gamma^2 < \omega_0^2$. Die zugehörige Greensche Funktion $G(t-t')$ genügt der DGL

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}G(t-t') + 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t-t') + \omega_0^2\, G(t-t') = \delta(t-t') \tag{2}$$

a) Zeige, daß $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\, G(t-t')\, f(t')$ eine partikuläre Lösung des harmonischen Oszillators ist.

b) Man bestätige, daß die Greensche Funktion

$$G(t-t') = \frac{1}{\Omega} e^{-\gamma(t-t')} \sin(\Omega(t-t')) \cdot \Theta(t-t') \quad , \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,, \tag{3}$$

eine Lösung von Gl. (2) ist. Betrachte nur $t \neq t'$, also $t > t'$ und $t < t'$ getrennt.

c) Nun seien alle $t \in]-\infty, \infty[$ zugelassen. Zeige mit Hilfe von Gl. (1), daß die Greensche Funktion Gl. (3) die DGL (2) erfüllt. (Man darf $h(t)\,\delta(t) = h(0)\,\delta(t)$ setzen, falls $h(t)$ in $t=0$ stetig.) Skizziere $G(t)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t)$.

3 Berechne über die Greensche Funktion Gl. (3) die Auslenkung $x(t)$ des Oszillators für

a) $f(t) = f_0\,\delta(t-t_0)$. Was ist also die physikalische Bedeutung von $G(t-t')$?

b) $f(t) = f_0 \cdot \Theta(t)$. Vergleiche das Ergebnis mit Blatt 6, Aufg. 4 b).

4 Wir betrachten ein mathematisches Pendel ohne Reibung (Masse m, Fadenlänge l, Schwerebeschleunigung g).

a) Bestimme die potentielle Energie $V(\varphi)$ mit dem Auslenkungswinkel φ aus der Ruhelage. φ sei zunächst beliebig!
Zeige, daß die kinetische Energie durch $T(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2$ gegeben ist.

b) Gebe die Bewegungsgleichung an (φ ist beliebig!), und überprüfe damit, daß die Gesamtenergie $E(\varphi,\dot{\varphi})$ eine Erhaltungsgröße ist, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = 0$.

c) Aus der Energieerhaltung, $E(\varphi,\dot{\varphi}) = const. = E_0$, gewinne man einen Ausdruck für $\dot{\varphi}(t)$ und daraus $\varphi(t)$. Es darf jetzt für kleine $\varphi \approx 0$ genähert werden. (Trennung der Veränderlichen (Integrationskonstanten!), $\cos(\varphi) \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$, Integraltabelle.)
Zwischenergebnis: $t - t_0 = \frac{1}{\omega_0}\int \mathrm{d}\varphi\, \frac{1}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}$.

d) Wo gehen die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \Omega_0$ ein?

— Besprechung in den Übungsgruppen am Freitag, den 16.12.05 —