

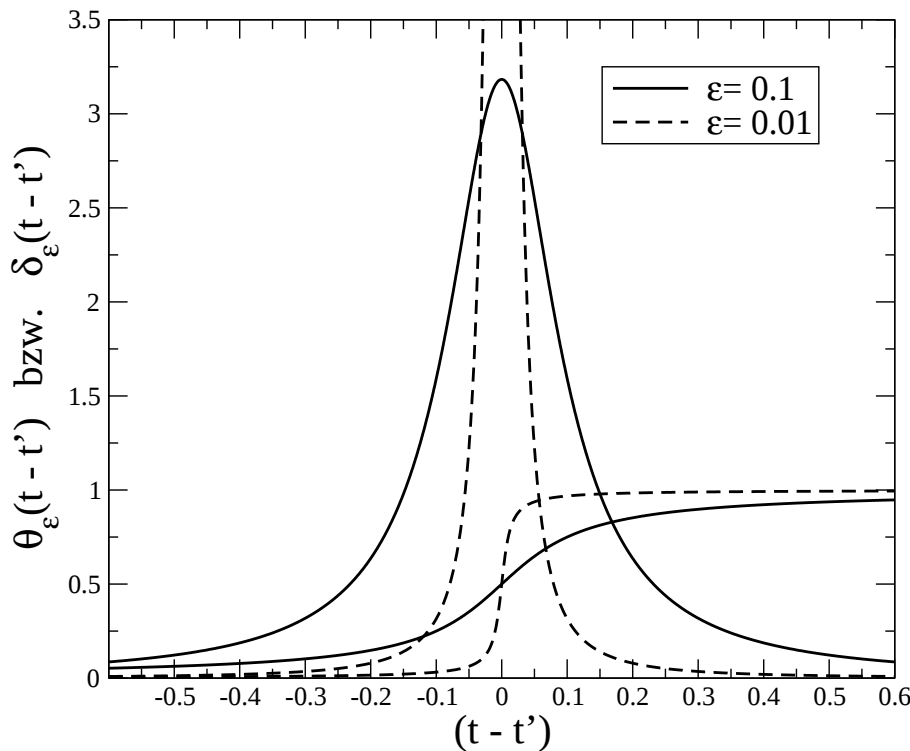
1

$$\Theta(t - t') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{t - t'}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \Theta(t - t') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1 + \frac{(t - t')^2}{\varepsilon^2}} \right) \frac{1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (t - t')^2} = \delta(t - t')$$

vergleiche Blatt 6, Aufg. 1 b).

Plot von $\Theta_\varepsilon(t - t')$ und deren Ableitung $\delta_\varepsilon(t - t')$ für $\varepsilon = 0.1$ und $\varepsilon = 0.01$:



[[Variante ohne Darstellung, für extra Interessierte (nicht Teil der Aufgabe):

Gemäß der Definition der δ -Funktion (Blatt 6, Aufg. 2) müßte eigentlich gelten:

$$\int_{-a}^a dt h(t) \frac{d}{dt} \Theta(t - t') = \int_{-a}^a dt h(t) \delta(t - t') = h(t')$$

Die rechte Seite ergibt sofort $h(t')$, wenn wir der Einfachheit mal annehmen, daß $-a < t' < a$.

Die linke Seite ergibt mit partieller Integration:

$$\left[\underbrace{\Theta(a - t')}_{=1} h(a) - \underbrace{\Theta(-a - t')}_{=0} h(-a) \right] - \int_{-a}^a dt \Theta(t - t') \dot{h}(t) =$$

$$= h(a) - \int_{t'}^a dt \dot{h}(t) = h(a) - [h(a) - h(t')] = h(t')$$

q.e.d. $\square$

2 Oszillator: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$.

Zugehörige Greensche Funktion:

$$\ddot{G}(t-t') + 2\gamma\dot{G}(t-t') + \omega_0^2 G(t-t') = \delta(t-t') \quad , \quad \dot{G}(t-t') = \frac{d}{dt}G(t-t') \quad \text{etc.}$$

a)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t') f(t') \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \dot{G}(t-t') f(t') \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \ddot{G}(t-t') f(t')$$

dies in Oszillator einsetzen

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' \underbrace{[\ddot{G}(t-t') + 2\gamma\dot{G}(t-t') + \omega_0^2 G(t-t')]_{= \delta(t-t')}} f(t') = f(t) \quad \Rightarrow \quad \checkmark$$

b) Als Greensche Funktion ist angegeben:

$$G(t-t') = \tilde{G}(t-t') \Theta(t-t') \quad , \quad \tilde{G}(t-t') = \frac{1}{\Omega} e^{-\gamma t} \sin[\Omega(t-t')] \quad , \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$t > t'$: $\Theta(t-t') = 1$:

$$\begin{aligned} \dot{G}(t-t') &= \dot{\tilde{G}}(t-t') = \frac{1}{\Omega} e^{-\gamma(t-t')} [-\gamma \sin(\cdot) + \Omega \cos(\cdot)] \\ \Rightarrow \quad \ddot{G}(t-t') &= \ddot{\tilde{G}}(t-t') = \frac{1}{\Omega} e^{-\gamma(t-t')} [\underbrace{(\gamma^2 - \Omega^2)}_{= 2\gamma^2 - \omega_0^2} \sin(\cdot) - 2\gamma\Omega \cos(\cdot)] \end{aligned}$$

einsetzen in Gl. (2)

$$\begin{aligned} [\ddot{G} + 2\gamma\dot{G} + \omega_0^2 G] &= \\ &= \frac{1}{\Omega} e^{-\gamma(t-t')} [\{(2\gamma^2 - \omega_0^2) + 2\gamma(-\gamma) + \omega_0^2\} \sin(\cdot) + \{-2\gamma\Omega + 2\gamma(\Omega)\} \cos(\cdot)] \\ &= 0 \quad \Rightarrow \quad \checkmark \end{aligned}$$

$t < t'$: $G(t-t') = 0 \quad \Rightarrow \quad$ alles trivial erfüllt.

c) Wenn $|t-t'| \rightarrow 0$ gehen darf, muß die Θ -Funktion explizit mitgenommen werden:

$$G(t-t') = \tilde{G}(t-t') \Theta(t-t') \quad \Rightarrow \quad \dot{G}(t-t') = \dot{\tilde{G}}(t-t') \Theta(t-t') + \underbrace{\tilde{G}(t-t') \delta(t-t')}_{= 0}$$

Wobei $\tilde{G}(t-t') = \text{stetig in } (t-t')=0$ und $\tilde{G}(0) = 0$ verwendet wurde.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \ddot{G}(t-t') &= \ddot{\tilde{G}}(t-t') \Theta(t-t') + \dot{\tilde{G}}(t-t') \delta(t-t') \\ &= \ddot{\tilde{G}}(t-t') \Theta(t-t') + \dot{\tilde{G}}(0) \delta(t-t')\end{aligned}$$

Einsetzen in Gl. (2) vom Übungsblatt

$$\underbrace{[\ddot{\tilde{G}}(t-t') + 2\gamma\dot{\tilde{G}}(t-t') + \omega_0^2\tilde{G}(t-t')]}_{=0 \text{ mit b)}} \Theta(t-t') + \dot{\tilde{G}}(0) \delta(t-t') = \delta(t-t')$$

und mit $\dot{\tilde{G}}(0) = 1$ folgt $\checkmark$.

3 a)

$$f(t) = f_0 \delta(t-t_0) \Rightarrow x(t) = f_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t') \delta(t'-t_0) = f_0 G(t-t_0)$$

$\Rightarrow G(t-t')$ ist also die Antwort des Oszillators auf einen δ -Impuls zur Zeit t' (auch aus Gl. (2) vom Übungsblatt direkt klar).

$$\Rightarrow x(t) = \frac{f_0}{\Omega} e^{-\gamma(t-t_0)} \sin[\Omega(t-t_0)] \Theta(t-t_0)$$

Dies ist eine simple gedämpfte Schwingung, die natürlich erst bei t_0 , zur Zeit des Impulses, losgeht. In der Greenschen Funktion steckt ja die Randbedingung drin, daß der Oszillator für $t \rightarrow -\infty$ in Ruhe ist (bis zum Impuls bei t_0 bleibt er das dann auch).

b) Allgemein, für eine Kraft, die bei $t = 0$ einsetzt:

$$f(t) = \tilde{f}(t) \Theta(t), \quad G(t-t') = \tilde{G}(t-t') \Theta(t-t')$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \tilde{G}(t-t') \tilde{f}(t') \Theta(t-t') \Theta(t') = \Theta(t) \int_0^t dt' \tilde{G}(t-t') \tilde{f}(t')$$

Den letzten Schritt am besten durch Aufzeichnen der Bereiche, in denen der Integrand $\neq 0$ ist, von Hand klarmachen. Man beachte die $\Theta(t)$ -Funktion im Ergebnis.

Hier:

$$f(t) = f_0 \Theta(t) \Rightarrow x(t) = \Theta(t) f_0 \int_0^t dt' \tilde{G}(t-t') = \Theta(t) \frac{f_0}{\Omega} \int_0^t dt' e^{-\gamma(t-t')} \sin[\Omega(t-t')]$$

Jetzt würde man den $\sin(\cdot)$ per Additionstheorem zerlegen, die nur von t abhängigen Faktoren vor das Integral ziehen und dann das Integral über t' ausführen. Eleganter:

$$e^{-\gamma(t-t')} \sin[\Omega(t-t')] = \text{Im} \left\{ e^{-\gamma(t-t')} e^{i\Omega(t-t')} \right\} = \text{Im} \left\{ e^{-t(\gamma-i\Omega)} e^{t'(\gamma-i\Omega)} \right\}$$

Man beachte, daß $e^{-\gamma(t-t')}$ reell ist und daher unter dem Imaginärteil stehen darf.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow x(t) &= \Theta(t) \frac{f_0}{\Omega} \operatorname{Im} \left\{ e^{-t(\gamma - i\Omega)} \int_0^t dt' e^{t'(\gamma - i\Omega)} \right\} \\
 &= \Theta(t) \frac{f_0}{\Omega} \operatorname{Im} \left\{ e^{-t(\gamma - i\Omega)} \frac{e^{t(\gamma - i\Omega)} - 1}{\gamma - i\Omega} \right\} \\
 &= \Theta(t) \frac{f_0}{\Omega} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1 - e^{-t(\gamma - i\Omega)}}{\gamma - i\Omega} \right\} \\
 &= \Theta(t) \frac{f_0}{\Omega} \frac{1}{\gamma^2 + \Omega^2} \operatorname{Im} \left\{ (1 - e^{-t(\gamma - i\Omega)})(\gamma + i\Omega) \right\} \\
 &= \Theta(t) \frac{f_0}{\Omega} \frac{1}{\omega_0^2} \operatorname{Im} \left\{ (\gamma + i\Omega) - e^{-t\gamma} (\gamma + i\Omega) (\cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t)) \right\} \\
 \Rightarrow x(t) &= \Theta(t) \frac{f_0}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\gamma t} \left\{ \cos(\Omega t) + \frac{\gamma}{\Omega} \sin(\Omega t) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Ergebnis aus Blatt 6, Aufg. 4 b), einschließlich der $\Theta(t)$ -Funktion (Sprungantwort).

4 a) Das Pendel schwingt in der x - z -Ebene (Zeichnung!), die z -Achse zeigt nach unten, x nach rechts. Dann gilt für gegebenen Auslenkungswinkel φ :

$$\begin{aligned}
 x &= l \sin(\varphi) \implies \dot{x} = l \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\
 z &= l \cos(\varphi) \implies \dot{z} = -l \sin(\varphi) \dot{\varphi}
 \end{aligned}$$

Die potentielle Energie ist

$$V = -mgz = -mgl \cos(\varphi)$$

Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2$$

b) Die Bewegungsgleichung hatten wir schon mal:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0$$

(Keine Näherung für kleine φ !)

Energieerhaltung:

$$E = T + V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2 - mgl \cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}E = ml^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mgl\sin(\varphi)\dot{\varphi} = ml^2\dot{\varphi}(t) \underbrace{\left[\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l}\sin(\varphi(t)) \right]}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \checkmark$$

c) Energieerhaltung:

$$E(\varphi, \dot{\varphi}) = \text{const.} = E_0 \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{ml^2}{2}(\dot{\varphi})^2 + V(\varphi)$$

$$\Rightarrow (\dot{\varphi})^2 = \frac{2}{ml^2}[E_0 - V(\varphi)] \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} = \sqrt{\frac{2}{ml^2}(E_0 - V(\varphi))}$$

Trennung der Veränderlichen und Integration:

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\dots}} \quad \Rightarrow \quad (t - t_0) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}(E_0 - V(\varphi))}} + C$$

t_0 und C sind Integrationskonstanten, die zunächst unbestimmt bleiben. C kann in t_0 absorbiert werden und wird jetzt weggelassen.

Kleine Winkel:

$$\varphi \approx 0 : \quad V(\varphi) \approx -mgl(1 - \frac{1}{2}\varphi^2) \quad \Rightarrow \quad (t - t_0) = \int d\varphi \frac{1}{\sqrt{\frac{2E_0}{ml^2} + \frac{2g}{l} - \frac{g}{l}\varphi^2}}$$

$$\Rightarrow (t - t_0) = \frac{1}{\omega_0} \int d\varphi \frac{1}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}, \quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{g}{l}}, \quad \boxed{\varphi_0^2 = 2 \left(\frac{E_0}{mgl} + 1 \right)}$$

Anstatt einer Stammfunktion plus Integrationskonstante C (die jetzt in t_0) steckt, hätte man natürlich auch schreiben können:

$$(t - t_0) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^\varphi d\varphi' \frac{1}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi'^2}}$$

Das Integral steht im Bronstein,

$$(t - t_0) = \frac{1}{\omega_0} \arcsin\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega_0 t - \omega_0 t_0)}$$

d) Die Anfangsbedingungen stecken in der konstanten Gesamtenergie E_0 und dem Zeitnullpunkt t_0 :

$$\varphi(0) = -\varphi_0 \sin(\omega_0 t_0), \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0 \varphi_0 \cos(\omega_0 t_0)$$

Konkret:

$$\varphi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \Omega_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \frac{\Omega_0}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \frac{\Omega_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Die Gesamtenergie hat den Wert

$$\varphi_0^2 = \left(\frac{\Omega_0}{\omega_0} \right)^2 = \frac{2E_0}{mgl} + 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_0 = \frac{1}{2}ml^2(\Omega_0)^2 - mgl}$$

Dies ist gerade die kinetische und die potentielle Energie bei $t = 0$, die eben zeitlich konstant bleibt.