Universität Karlsruhe WS 2005/06
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle , Dr. Jan Brinckmann **16.12.05**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre theorie-a@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochh. Zi. 10.13

Übungsblatt Nr. 8 zur Vorlesung Theorie A

$\boxed{1}$ Der "total antisymmetrische Einheitstensor" (ε-Tensor) ist definiert als

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad (i,j,k) = (1,2,3) \ \text{oder} \ (3,1,2) \ \text{oder} \ (2,3,1) \\ -1 & \text{falls} \quad (i,j,k) = (1,3,2) \ \text{oder} \ (2,1,3) \ \text{oder} \ (3,2,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Es seien $i,j,k \in \{1,2,3\}$ fest gewählt.
Begründe, daß $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jik}$ für $i \neq j \neq k$ (1)
Begründe, daß $\varepsilon_{iik} = \varepsilon_{iki} = \varepsilon_{kii} = 0$ (2)
Gilt (1) auch für z.B. $i = j \neq k$ oder $i = j = k$?

b) Die i-te Komponente des Vektorproduktes lautet $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$.
Wie schreibt sich damit $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$?
Zeige, daß gilt: $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{a})$.
Zeige, daß gilt: $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{a}(\mathbf{c} \times \mathbf{b})$.

c) Mit dem "Kronecker-Delta" $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j \\ 0 & \text{falls} \quad i \neq j \end{cases}$ gilt die nützliche Relation

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\, \delta_{km} - \delta_{jm}\, \delta_{kl} \quad \text{für} \ j,k,l,m \in \{1,2,3\} \tag{3}$$

Man begründe diese Formel.

d) Zeige mit Hilfe von (3), daß gilt:
$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\,\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\,\mathbf{b})$ und $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}\,\mathbf{c})(\mathbf{b}\,\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\,\mathbf{d})(\mathbf{b}\,\mathbf{c})$

$\boxed{2}$ Ein anharmonischer Oszillator genügt der Bewegungsgleichung mit Anfangsbedingungen:

$$\ddot{x}(t) + r\,(x(t))^3 + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad \text{mit} \quad x(0) = 0 \ , \quad \dot{x}(0) = v_0 \tag{4}$$

Wir berechnen nun eine Näherungslösung dieser nichtlinearen DGL über den Ansatz
$x(t) = x_0(t) + r\,x_1(t) + r^2\,x_2(t) + \ldots$, denn die Anharmonizität r soll klein sein, $r \approx 0$.

a) Zunächst sei $r = 0$: Welcher DGL mit welchen Anfangsbedingungen genügt $x_0(t)$?
Wie lauten die allgemeine und die spezielle Lösung $x_0(t)$?
Jetzt sei $r > 0$: Man verwende den obigen Ansatz und schreibe (4) in der Form $(\ldots) + r\,(\ldots) = 0$, wobei alle Terme $\sim r^2, \sim r^3, \sim r^4, \ldots$ vernachlässigt werden.
Bestätige, daß sich aus dem Nullsetzen der $(\ldots)$ die folgende DGL für $x_1(t)$ ergibt:

$$\ddot{x}_1(t) + \omega_0^2 x_1(t) = -(v_0/\omega_0)^3 \sin^3(\omega_0 t) \ , \tag{5}$$

mit den Anfangsbedingungen $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$. (6)

b) Bestimme eine partikuläre Lösung $x_{1p}(t)$ der DGL (5), sowie die allgemeine und die spezielle Lösung $x_1(t)$ für die Anfangsbedingungen (6).
(Ansatz vom Typ der rechten Seite, der allerdings modifiziert werden muß.)
Wie lautet also die spezielle Lösung $x(t)$ des anharmonischen Oszillators (4), wenn Terme $\sim r^2, \sim r^3, \ldots$ vernachlässigt werden?

— Besprechung in den Übungsgruppen am Freitag, den 23.12.05 —