

1 a) (1): Für (i, j, k) gegeben und $i \neq j \neq k$ (gemeint ist: $i \neq j$ und $i \neq k$ und $j \neq k$) ist ε also $+1$ oder -1 . Werden jetzt zwei der Indices vertauscht (egal welche), wechselt das Vorzeichen.

(2): Sind zwei oder alle drei Indices gleich, ist ε nach Definition null.

(1) ist trivial erfüllt, wenn zwei (egal welche) oder alle drei Indices gleich sind, da dann alle vier ε in der Zeile (1) null sind

b) Skalarprodukt mal Vektorprodukt:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

In der Formel

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \quad (\text{x1})$$

gehen die drei Terme durch zyklische Vertauschung der drei Vektoren auseinander hervor: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \rightarrow (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a})$. Schreibt man jeweils die Formel mit dem ε -Tensor aus, so ist ersichtlich, daß sich diese Vertauschung einfach auf die Indices (i, j, k) an ε_{ijk} überträgt, und mit der Invarianz von ε unter zyklischer Vertauschung der Indices (siehe Definition) folgt direkt Gl. (x1).

Genauso folgt

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{a}(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \quad (\text{x2})$$

direkt aus der Antisymmetrie des ε -Tensors (also Gl. (2) vom Aufgabenblatt).

c) Es soll gelten:

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (\text{x3})$$

Betrachte zunächst die Fälle:

$$j = k : \rightarrow \varepsilon_{ijj} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{jm} - \delta_{jm} \delta_{jl} \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \checkmark$$

$$l = m : \rightarrow \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ill} = \delta_{jl} \delta_{kl} - \delta_{jl} \delta_{kl} \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \checkmark$$

Es bleibt also übrig: $j \neq k$ und $l \neq m$: Seien jetzt mal l und $m \neq l$ festgelegt (z.B. $l, m \in \{2, 3\}$ mit $l \neq m$), dann müssen j und k auch aus der Menge $\{l, m\}$ sein (im Beispiel: $j, k \in \{2, 3\}$), da sonst für i keine Zahl $\in \{1, 2, 3\}$ übrig bleibt mit $i \neq j$ und $i \neq k$ und $i \neq l$ und $i \neq m$, und

$\varepsilon_{ijk} = 0$ wäre (Im Bsp.: nur $i = 1$ möglich). Dann bleibt nur übrig, daß ($j = l$ und $k = m$) oder ($j = m$ und $k = l$), was genau die rechte Seite der Gl. (x3) widerspiegelt. Die Vorzeichen der δ -Kombinationen ergeben sich aus den ε -Tensoren: Beispiel:

i	j	k	l	m	$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}$	$\delta \cdot \delta - \delta \cdot \delta$
1	2	3	2	3	$1 \cdot 1$	$1 - 0$
1	2	3	3	2	$1 \cdot (-1)$	$0 - 1$
1	3	2	3	2	$(-1) \cdot (-1)$	$1 - 0$
1	3	2	2	3	$(-1) \cdot 1$	$0 - 1$

c) Wir betrachten eine Komponente des Vektors auf der linken Seite:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i &= \sum_{l,m} \varepsilon_{ilm} a_l \left(\sum_{j,k} \varepsilon_{mjk} b_j c_k \right) \\
 &= \sum_{l,m,j,k} a_l b_j c_k \underbrace{\varepsilon_{ilm} \varepsilon_{mjk}}_{= \varepsilon_{mil}} \\
 &= \sum_{l,j,k} a_l b_j c_k \underbrace{\sum_m \varepsilon_{mil} \varepsilon_{mjk}}_{= \delta_{ij} \delta_{lk} - \delta_{ik} \delta_{lj}} \\
 &= b_i \left(\sum_k a_k c_k \right) - c_i \left(\sum_l a_l b_l \right) \\
 &= [\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})]_i \Rightarrow \checkmark
 \end{aligned}$$

Die zweite Formel kann man genauso, als das Skalarprodukt zweier Vektorprodukte mit ε -Tensoren ausschreiben, und sich durch die Summen arbeiten. Etwas einfacher ist:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}_{=: \mathbf{f}} (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \mathbf{f}(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{d}(\mathbf{f} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{d} \times \mathbf{f}) \\
 &= \mathbf{c}(\mathbf{d} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) \\
 &= \mathbf{c}(\mathbf{a}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{a})) \\
 &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}) \\
 &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \Rightarrow \checkmark
 \end{aligned}$$

2 a)

$$\boxed{r=0} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(t) = x_0(t) \Rightarrow x_0(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Anfangsbedingungen:

$$x(0) = x_0(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

$$\boxed{r > 0} : \quad x(t) = x_0(t) + rx_1(t) + r^2x_2(t) + \dots$$

Wir brauchen für die Aufgabe eigentlich nur bis zum Term $\sim r$ mitnehmen, zur Demonstration nehmen wir mal auch $\sim r^2$ mit:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_0 + r\ddot{x}_1 + r^2\ddot{x}_2 \\ x &= x_0 + rx_1 + r^2x_2 \\ (x)^3 &= (x_0 + rx_1 + r^2x_2)^3 = (x_0)^3 + 3r(x_0)^2x_1 + \underbrace{(\sim r^2) + (\sim r^3)}_{\text{weglassen!}} \end{aligned}$$

In x^3 brauchen wir nur bis $\sim r$, denn es steht ja schon ein r in der DGL (4) davor! (Für die ursprüngliche Aufgabe bräuchten wir daher nur $(x_0)^3$.) Einsetzen in die DGL (4) und sortieren nach Potenzen von r :

$$(\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0) + r(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + x_0^3) + r^2(\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + 3x_0^2 x_1) = 0$$

Für $r = 0$ muß die erste $(\dots) = 0$ sein, für eine Näherung bis $\sim r$ auch die zweite etc., also:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 &= 0 \\ \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= -(x_0)^3 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 &= -3(x_0)^2 x_1 \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x(0) = 0 &= x_0(0) + rx_1(0) + r^2x_2(0) \quad , \quad x_0(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1(0) = x_2(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 &= \dot{x}_0(0) + r\dot{x}_1(0) + r^2\dot{x}_2(0) \quad , \quad \dot{x}_0(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Konkret ergibt das für x_1 :

$$\boxed{\ddot{x}_1(t) + \omega_0^2 x_1(t) = -\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^3 \sin^3(\omega_0 t)} \quad , \quad \boxed{x_1(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}_1(0) = 0}$$

Wenn die spezielle Lösung dieser inhomogenen DGL bekannt ist, kann man auch die DGL für x_2 explizit angeben und daraus $x_2(t)$ bestimmen etc.

b) Die homogene Lösung der DGL für x_1 lautet natürlich:

$$x_{1h}(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Für die partikuläre Lösung machen wir einen Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$\sin^3(\omega_0 t) = \frac{3}{4} \sin(\omega_0 t) - \frac{1}{4} \sin(3\omega_0 t) \Rightarrow \text{Ansatz: } x_{1p}(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \sin(3\omega_0 t)$$

Dieser Ansatz funktioniert nicht: der $\sin(\omega_0 t)$ -Term verschwindet aus der linken Seite der DGL (ausprobieren!), denn er ist ja gerade eine Lösung der homogenen DGL.

Man könnte auf die Idee kommen, $t \sin(\omega_0 t)$ oder $t \cos(\omega_0 t)$ zu nehmen; zweiteres funktioniert:

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } & \boxed{x_{1p}(t) = a t \cos(\omega_0 t) + b \sin(3\omega_0 t)} \\ \Rightarrow \ddot{x}_{1p}(t) &= -2a\omega_0 \sin(\omega_0 t) - a t \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - 9b\omega_0^2 \sin(3\omega_0 t) \end{aligned}$$

In die DGL für x_1 einsetzen $\Rightarrow$

$$[-2a\omega_0] \sin(\omega_0 t) + \underbrace{[-a\omega_0^2 + a\omega_0^2]}_{=0} t \cos(\omega_0 t) + \underbrace{[-9b\omega_0^2 + \omega_0^2 b]}_{=-8b\omega_0^2} = -\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^3 \left(\frac{3}{4} \sin(\omega_0 t) - \frac{1}{4} \sin(3\omega_0 t)\right)$$

Die Vorfaktoren der linear unabhängigen Funktionen $\sin(\omega_0 t)$ und $\sin(3\omega_0 t)$ müssen sich jeweils zu null addieren (Koeffizientenvergleich)

$$\boxed{a = \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^3 \frac{3}{8\omega_0}}, \quad \boxed{b = -\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^3 \frac{1}{32\omega_0^2}}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$x_1(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + a t \cos(\omega_0 t) + b \sin(3\omega_0 t)$$

Anfangsbedingungen für x_1 :

$$x_1(0) = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}, \quad \dot{x}_1(0) = 0 \Rightarrow \boxed{B = -\frac{a}{\omega_0} - 3b}$$

Damit ergibt sich also

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \left(-\frac{a}{\omega_0} - 3b\right) \sin(\omega_0 t) + a t \cos(\omega_0 t) + b \sin(3\omega_0 t) \\ &= \frac{a}{\omega_0} \left[\left(-1 - \frac{3b\omega_0}{a}\right) \sin(\omega_0 t) + (\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) + \frac{b\omega_0}{a} \sin(3\omega_0 t) \right] \end{aligned}$$

Einsetzen von a/ω_0 und b/a liefert

$$\boxed{x_1(t) = \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^3 \frac{3}{8\omega_0^2} \left[-\frac{3}{4} \sin(\omega_0 t) + (\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{12} \sin(3\omega_0 t) \right]}$$

Die spezielle Lösung des anharmonischen Oszillators, in der Näherung bis $\sim r$, ist also

$$x(t) = x_0(t) + rx_1(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + rx_1(t)$$

und mit dem eben bestimmten x_1 :

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \left[\sin(\omega_0 t) + G \left\{ (\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) - \frac{3}{4} \sin(\omega_0 t) - \frac{1}{12} \sin(3\omega_0 t) \right\} \right]}, \quad G = r \left(\frac{v_0}{\omega_0} \right)^2 \frac{3}{8\omega_0^2}$$

Die Amplitude dieser Funktion wächst stetig an, aufgrund des $(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t)$ -Terms. Dies bedeutet, daß $x(t)$ irgendwann $\rightarrow \infty$ und damit unphysikalisch wird. Der Grund ist, daß wir in der Näherung $r \ll 1$ angenommen haben, aber das reicht nicht, denn wir müssen eigentlich $r|x_1(t)| \ll |x_0(t)|$ verlangen. D.h., ab einer bestimmten Zeit, wenn diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist, wird die Näherung ungültig.