Theorie A (WS 2005/06)
Musterlösung Übungsblatt **9 (Test)** 20.01.06

$\boxed{1}$ Ableitung:

$$f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\sinh'(x)}{\cosh(x)} - \frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)} \cosh'(x)$$

Dazu:

$$\sinh'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x) \quad , \quad \cosh'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$$

Es folgt:

$$f'(x) = 1 - \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

1/2 Punkt

Das läßt sich noch umschreiben:

$$\text{Mit} \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

Stammfunktion:

$$F(x) = \int \mathrm{d}x \, \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad , \quad \text{Substitution:} \quad u = \cosh(x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = \sinh(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \int \mathrm{d}u \, \frac{1}{u} = \ln(u) = \ln[\,\cosh(x)\,]$$

1/2 Punkt

$\Sigma =$ **1** Punkt

$\boxed{2}$ Über partielle Integration:

$$F(t) = \int \mathrm{d}t \, \underbrace{e^{\lambda t}}_{\dot{u}} \underbrace{\cos(\omega t)}_{v} = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} \cos(\omega t) + \frac{\omega}{\lambda} \int \mathrm{d}t \, e^{\lambda t} \sin(\omega t)$$

mit

$$\dot{u} = e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} \quad , \quad v = \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = -\omega \sin(\omega t)$$

Im zweiten Term nochmal partiell integrieren:

$$\int \mathrm{d}t\ \underbrace{e^{\lambda t}}_{\dot u}\underbrace{\sin(\omega t)}_{v} = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\lambda}\underbrace{\int \mathrm{d}t\, e^{\lambda t}\cos(\omega t)}_{=F(t)}$$

$$\Rightarrow \quad F(t)\left(1+\frac{\omega^2}{\lambda^2}\right) = e^{\lambda t}\left(\frac{1}{\lambda}\cos(\omega t) + \frac{\omega}{\lambda^2}\sin(\omega t)\right)$$

$$\Rightarrow \quad F(t) = e^{\lambda t}\frac{\lambda\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)}{\omega^2+\lambda^2}$$

2 Punkte

Alternativ: über komplexe Darstellung:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i\sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}) \ , \quad \sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})$$

Damit

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad F(t) &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\, e^{(\lambda+i\omega)t} + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\, e^{(\lambda-i\omega)t} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(\lambda+i\omega)t}}{\lambda+i\omega} + \frac{e^{(\lambda-i\omega)t}}{\lambda-i\omega}\right] \\
&= \frac{1}{2}e^{\lambda t}\frac{\lambda(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}) - i\omega(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})}{\lambda^2+\omega^2} \\
\Rightarrow \quad F(t) &= e^{\lambda t}\frac{\lambda\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)}{\omega^2+\lambda^2}
\end{aligned}$$

2 Punkte

Noch alternativer: über komplexe Darstellung, aber anders:

$$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\{e^{i\omega t}\}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad F(t) &= \mathrm{Re}\{\int \mathrm{d}t\, e^{(\lambda+i\omega)t}\} = \mathrm{Re}\{\frac{e^{(\lambda+i\omega)t}}{\lambda+i\omega}\} \\
&= e^{\lambda t}\mathrm{Re}\{\frac{e^{i\omega t}(\lambda-i\omega)}{\lambda^2+\omega^2}\} = e^{\lambda t}\mathrm{Re}\{\frac{(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t))(\lambda-i\omega)}{\lambda^2+\omega^2}\} \\
&= e^{\lambda t}\frac{\lambda\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)}{\omega^2+\lambda^2}
\end{aligned}$$

2 Punkte

$\Sigma=$ **2** Punkte

$\boxed{\mathbf{3}}$ **a)** $\mathbf{F}$ in positive x-Richtung $\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} = F$. $\boxed{\textbf{1/2}\ \text{Punkt}}$

Energie:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad , \quad V = -F\,x$$

denn Bewegung des Teilchens nach rechts (positive x) ist mit der Kraft und gibt potentielle Energie.

$$\Rightarrow \quad E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - F\,x$$ $\boxed{\textbf{1/2}\ \text{Punkt}}$

Energieerhaltung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = m\dot{x}\,\ddot{x} - F\,\dot{x} = \dot{x}(\underbrace{m\ddot{x} - F}_{=0}) = 0$$ $\boxed{\textbf{1/2}\ \text{Punkt}}$

b)

$$E_0 = E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E_0 - V(x))$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V(x))}$$ $\boxed{\textbf{1/2}\ \text{Punkt}}$

Trennung der Veränderlichen:

$$(t - t_0) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V(x))}} \quad , \quad t_0 = \text{Integrationskonstante}$$

$$\text{Hier:} \quad V(x) = -F\,x \quad \Rightarrow \quad (t - t_0) = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E_0 + F\,x}}$$

Substitution:

$$\varepsilon = E_0 + F\,x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\varepsilon = F\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad (t - t_0) = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{F}\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}}_{=2\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{2m}}{F}\sqrt{E_0 + F\,x}$$

$$\Rightarrow \quad E_0 + F\,x = \frac{F^2}{2m}(t - t_0)^2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{F}{2m}(t - t_0)^2 - \frac{E_0}{F}$$ $\boxed{\textbf{1}\ \text{Punkt}}$

c)

$$x(0) = x_0 = \frac{F}{2m}(t_0)^2 - \frac{E_0}{F} \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{F^2}{2m}(t_0)^2 - F\,x_0$$

und

$$\dot{x}(0) = v_0 = \frac{F}{m}(-t_0)$$

$$\Rightarrow \quad t_0 = -\frac{mv_0}{F} \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{m}{2}(v_0)^2 - F\,x_0$$

1/2 Punkt

Das Ergebnis für E_0 ist korrekt: Es muß ja, wegen Energieerhaltung, herauskommen:

$$E_0 = E(x, \dot{x}) = E(x(0), \dot{x}(0)) = E(x_0, v_0)$$

1/2 Punkt

$\Sigma =$ **4** Punkte

---

4 **a)** Homogene Lösung:

$$\ddot{x} + 3\gamma\dot{x} + 2\gamma^2 x = 0 \;\; , \quad \text{Ansatz: } x_h(t) = e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 3\gamma\lambda + 2\gamma^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_h(t) = Ae^{-\gamma t} + Be^{-2\gamma t}$$

1/2 Punkt

Partikuläre Lösung: Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$x_p(t) = a\cos(\gamma t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_p = -a\gamma\sin(\gamma t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_p = -a\gamma^2\cos(\gamma t)$$

Beim Einsetzen wird klar: der sin()-Term kann nicht zum Verschwinden gebracht werden $\Rightarrow$ neuer Ansatz:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= a\cos(\gamma t) + b\sin(\gamma t) \quad \Rightarrow \\ \dot{x}_p(t) &= -a\gamma\sin(\gamma t) + b\gamma\cos(\gamma t) \quad \Rightarrow \\ \ddot{x}_p(t) &= -a\gamma^2\cos(\gamma t) - b\gamma^2\sin(\gamma t) \end{aligned}$$

Einsetzen

$$\Rightarrow \quad (a + 3b)\gamma^2\cos(\gamma t) + (b - 3a)\gamma^2\sin(\gamma t) = f_0\cos(\gamma t)$$

Koeffizientenvergleich

$$\Rightarrow \quad \gamma^2(a + 3b) = f_0 \;\; , \quad \gamma^2(b - 3a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 3a} \;\; , \quad \boxed{a = \frac{f_0}{10\gamma^2}}$$

2 Punkte

Also lautet die allgemeine Lösung:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} + Be^{-2\gamma t} + a[\cos(\gamma t) + 3\sin(\gamma t)] \ , \quad a = \frac{f_0}{10\gamma^2}$$

b)

$$x(0) = 0 = (A + B) + a \quad \Rightarrow \quad B = -A - a \ ,$$

$$\dot{x}(0) = 0 = -\gamma(A + 2B) + 3a\gamma \quad \Rightarrow \quad 0 = -\gamma(-A - 2a) + 3a\gamma$$

$$\Rightarrow \quad A = -5a \quad \Rightarrow \quad B = 4a$$

$\boxed{\textbf{1/2}\ \text{Punkt}}$

$$\Rightarrow \quad x(t) = a[-5e^{-\gamma t} + 4e^{-2\gamma t} + \cos(\gamma t) + 3\sin(\gamma t)] \ , \quad a = \frac{f_0}{10\gamma^2}$$

$\boxed{\Sigma = \textbf{3}\ \text{Punkte}}$