Theorie A (WS 2005/06)

Musterlösung Übungsblatt **10** 20.01.06

1

(i) $V(\mathbf{r}) = y^2z^2 + z^3x^3 + x^4y^4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}V = -\begin{pmatrix} 3x^2z^3 + 4x^3y^4 \\ 2yz^2 + 4y^3x^4 \\ 2zy^2 + 3z^2x^3 \end{pmatrix}$

(ii) $V(\mathbf{r}) = x\sin(yz) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\begin{pmatrix} \sin(yz) \\ xz\cos(yz) \\ xy\cos(yz) \end{pmatrix}$

(iii) $V(\mathbf{r}) = f(x) + f(y) + f(z) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\begin{pmatrix} f'(x) \\ f'(y) \\ f'(z) \end{pmatrix}$

2

(i) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x-y)^2(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) = (x-y)^2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (x-y)^2 \\ -(x-y)^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} yz\sin(xy) \\ xz\sin(xy) \\ -\cos(xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\sin(xy) - x\sin(xy) \\ -y\sin(xy) + y\sin(xy) \\ (z\sin(xy) + xyz\cos(xy)) \\ \quad - (z\sin(xy) + xyz\cos(xy)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + y - z^2 \\ 3x - 2y + 4z \end{pmatrix}$$

Weg: $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(2\pi t) \\ R\sin(2\pi t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = 2\pi R\begin{pmatrix} -\sin(2\pi t) \\ \cos(2\pi t) \\ 0 \end{pmatrix}$ mit (i) $t \in [\,0, 1\,[$ (ii) $t \in [\,0, -1\,[$

Geleistete Arbeit:

$$
\begin{aligned}
\text{(i)}: \quad A &= \int_0^1 \mathrm{d}t\, \dot{\mathbf{r}}(t)\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \\
&= 2\pi R \int_0^1 \mathrm{d}t \begin{pmatrix} -\sin(2\pi t) \\ \cos(2\pi t) \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{F}(x(t), y(t), z=0) \\
&= 2\pi R^2 \int_0^1 \mathrm{d}t \begin{pmatrix} -\sin(2\pi t) \\ \cos(2\pi t) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t) \\ \cos(2\pi t) + \sin(2\pi t) \\ \ldots\ldots \end{pmatrix} \\
&= 2\pi R^2 \int_0^1 \mathrm{d}t\, [\, 1 - \sin(2\pi t)\cos(2\pi t)\,] \\
\Rightarrow \quad \text{(i)}: \quad A &= 2\pi R^2 \int_0^1 \mathrm{d}t\, [\, 1 - \frac{1}{2}\sin(4\pi t)\,] = 2\pi R^2 \\
\text{(ii)}: \quad A &= 2\pi R^2 \int_0^{-1} \mathrm{d}t\, [\, 1 - \frac{1}{2}\sin(4\pi t)\,] = -2\pi R^2
\end{aligned}
$$

A hängt vom Umlaufsinn ab, insbesondere ist die Arbeit über diesen geschlossenen Weg $\neq 0$; $\mathbf{F}$ kann also nicht konservativ sein.

$\boxed{4}$ **a)**

$$
\mathbf{F} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Weg (i)}: \quad A_i(x_1, y_1) &= \int \mathrm{d}t\, \dot{\mathbf{r}}(t)\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} t \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in [0, 1[\\
&= \int_0^1 \mathrm{d}t \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} t = 2x_1 y_1 \int_0^1 \mathrm{d}t\, t = x_1 y_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Weg (ii)}: \quad A_{ii}(x_1, y_1) &= \int_0^{x_1} \mathrm{d}x\, \mathbf{e}_x\, \mathbf{F}(x, y=0) + \int_0^{y_1} \mathrm{d}y\, \mathbf{e}_y\, \mathbf{F}(x=x_1, y) \\
&= \int_0^{x_1} \mathrm{d}x \;\; y\big|_{y=0} + \int_0^{y_1} \mathrm{d}y \;\; x\big|_{x=x_1} \\
&= 0 + x_1 y_1
\end{aligned}
$$

Also ist $A_i = A_{ii}$, und wir können vermuten, daß $\mathbf{F}$ aus einem Potential $V(x,y) = -A(x,y)$ abgeleitet werden kann.

$$\text{Test:}\quad V(x,y) = -xy \quad\Rightarrow\quad \mathbf{F}(x,y) = -\boldsymbol{\nabla}V = -\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \mathbf{F} \quad\Rightarrow\quad \surd$$

Außerdem war dieses Ergebnis zu erwarten, denn $\mathbf{F}$ ist konservativ:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Weg (i):}\quad A_i &= \int_0^1 \mathrm{d}t \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} t = 0 \\ \text{Weg (ii):}\quad A_{ii} &= -\int_0^{x_1} \mathrm{d}x\; y\big|_{y=0} + \int_0^{y_1} \mathrm{d}y\; x\big|_{x=x_1} \\ &= x_1 y_1 \end{aligned}$$

Hier ist also $A_i \neq A_{ii}$, die Arbeit also abhängig vom Weg, und ein Potential existiert nicht. $\mathbf{F}$ ist ja auch nicht konservativ:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{5}$ **a)**

$$V(\mathbf{r}) = \frac{D}{2}x^2 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}V = \begin{pmatrix} -Dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -Dx\,\mathbf{e}_x$$

$$\Rightarrow\quad m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} &\ddot{x} + \tfrac{D}{m}x = 0 \\ &\ddot{y} = 0 \\ &\ddot{z} = 0 \end{aligned}$$

Energieerhaltung:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}})^2 + V(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{r}}[\underbrace{m\ddot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\nabla} V}_{=0}] = 0$$

Dies gilt für alle Potentiale, die nicht explizit von t oder $\dot{\mathbf{r}}$ abhängen.

Drehimpulserhaltung:

$$\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = m[\underbrace{(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}})}_{=0} + (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}})] = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Hier:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = -Dx(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_x) = -Dx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -D \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ -xy \end{pmatrix} \neq 0$$

Der Drehimpuls ist also *nicht* erhalten.

b)

$$V = \frac{D}{2}r^2 = \frac{D}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = -D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -D\mathbf{r}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{r}} + \frac{D}{m}\mathbf{r} = 0 \qquad \text{(3-dimensionaler harm. Oszillator)}$$

Energieerhaltung gilt wie oben.
Drehimpuls:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = -D(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0$$

Hier ist der Drehimpuls also erhalten.

Energieerhaltung gilt, weil die potentielle Energie nicht explizit zeitabhängig ist und keine Reibung vorliegt. Drehimpulserhaltung liegt nur in **b)** vor, weil dort das Potential invariant ist unter Drehungen (Rotationssymmetrie), oder äquivalent: weil die Kraft eine Zentralkraft ist.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Kräfte:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\partial_{x_1} V(x_1 - x_2) = -\left.(\partial_x V(x))\right|_{x=x_1-x_2} \equiv -V'(x_1 - x_2) \\ F_2 &= -\partial_{x_2} V(x_1 - x_2) = +\left.(\partial_x V(x))\right|_{x=x_1-x_2} = +V'(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad m_1\ddot{x}_1 = -V'(x_1 - x_2) \ , \quad m_2\ddot{x}_2 = +V'(x_1 - x_2)$$

Gesamtimpuls:

$$P = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = -V'(x_1 - x_2) + V'(x_1 - x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \surd$$

Gesamtenergie:

$$E = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2)^2 + V(x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dot{x}_1[\,m_1\ddot{x}_1 + V'(x_1 - x_2)\,] + \dot{x}_2[\,m_2\ddot{x}_2 - V'(x_1 - x_2)\,] = 0 \quad \Rightarrow \quad \surd$$