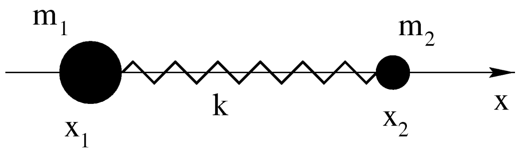
Universität Karlsruhe WS 2005/06
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann **20.01.06**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre theorie-a@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochh. Zi. 10.13

Übungsblatt Nr. 11 zur Vorlesung Theorie A

$\boxed{1}$ Ein Molekül bestehe aus zwei ungleichen Punktmassen m_1 und m_2, die sich entlang der x-Achse bewegen können und über eine masselose Feder (Konstante k, Ruhelänge a) verbunden sind. Die Koordinate von Masse 1 bzw. 2 sei x_1 bzw. x_2:



a) Bestimme die Bewegungsgleichungen für $x_1(t)$ und $x_2(t)$, und gebe den Ausdruck für die Gesamtenergie $E(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ an.

b) Definiere Schwerpunkt- X und Relativkoordinate x, bestimme die Bewegungsgleichungen für $X(t)$ und $x(t)$, und gebe jeweils die allgemeine Lösung an.

c) Was ergibt sich für die Gesamtenergie $E(x, X, \dot{x}, \dot{X})$, und welchen Wert nimmt E an, wenn $x(t)$ und $X(t)$ aus **b)** eingesetzt werden?

$\boxed{2}$ In Polarkoordinaten $r(t)$, $\varphi(t)$ lauten die Einheitsvektoren in der x-y-Ebene
$\mathbf{e}_r(t) = \cos(\varphi)\mathbf{e}_x + \sin(\varphi)\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_\varphi(t) = -\sin(\varphi)\mathbf{e}_x + \cos(\varphi)\mathbf{e}_y$.
Damit soll die Bewegung eines Teilchens der Masse m am Ort $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ unter dem Einfluß einer Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ in der x-y-Ebene beschrieben werden.

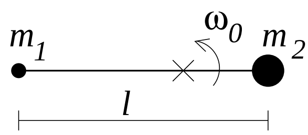
a) Zeige zunächst, daß $\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_\varphi$ orthonormal sind, und bestimme $\dot{\mathbf{e}}_r$ und $\dot{\mathbf{e}}_\varphi$.
Zeige dann, daß die Newtonsche Bewegungsgleichung für m die Form
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m(\ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2)\mathbf{e}_r + m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi$ annimmt.

b) Bestimme den Ausdruck für den Drehimpulsvektor $\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$ in Polarkoordinaten.

c) $\mathbf{F}$ sei nun eine Zentralkraft, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\mathbf{e}_r$. Zeige, daß jetzt $\mathbf{L}$ eine Erhaltungsgröße ist, und benutze $\mathbf{L} = const.$, um $\varphi(t)$ aus der Bewegungsgleichung zu eliminieren.

d) Die Radialbewegung $r(t)$ der Masse kann als eine eindimensionale Bewegung (z.B. auf der x-Achse) uminterpretiert werden. In welchem Potential $V_{eff}(r)$ bewegt sich m für $F(r) = -kr$, $k = const. > 0$? Um welches physikalische System handelt es sich? Skizziere $V_{eff}(r)$ und diskutiere qualitativ die möglichen Bahnkurven.

$\boxed{3}$ Eine Hantel aus zwei unterschiedlichen Punktmassen m_1 und m_2, die über eine masselose Stange der Länge l verbunden sind, rotiert kräftefrei in der x-y-Ebene mit der konstanten Kreisfrequenz ω_0. Die Drehachse geht parallel zu $\mathbf{e}_z$ durch den Schwerpunkt der Hantel; der Schwerpunkt befindet sich in Ruhe.



a) Bestimme den Gesamtdrehimpulsvektor $\mathbf{L}$ und die Energie T der Hantel.

b) Zur Zeit $t = 0$ reißt die Stange. Man bestimme Betrag und Richtung der Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ der Massen m_1, m_2 allein durch Ausnutzen von Erhaltungssätzen.

— Besprechung in den Übungsgruppen am Freitag, den 27.01.06 —