

1 Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{x}_1 = +k(x_2 - x_1 - a) \equiv F_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - a) \equiv F_2$$

Energie:

$$E = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2)^2 + V(x_2 - x_1)$$

Potential:

$$V(x_2 - x_1) = \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - a)^2 \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial x_1}V(x_2 - x_1) = -k(x_2 - x_1 - a)(-1) = F_1 \quad \checkmark$$

$$V(x_2 - x_1) = \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - a)^2 \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial x_2}V(x_2 - x_1) = -k(x_2 - x_1 - a) = F_2 \quad \checkmark$$

b) Koordinaten:

$$x = x_2 - x_1 \quad , \quad MX = m_1x_1 + m_2x_2 \quad , \quad M = m_1 + m_2$$

Auflösen liefert

$$x_1 = X - \frac{m_2}{M}x \quad , \quad x_2 = X + \frac{m_1}{M}x$$

Einsetzen in Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{X} - \underbrace{\frac{m_2 m_1}{M}}_{=\mu} \ddot{x} = k(x - a)$$

$$m_2 \ddot{X} + \underbrace{\frac{m_2 m_1}{M}}_{=\mu} \ddot{x} = -k(x - a)$$

Summe bzw. Differenz dieser Gleichungen bilden

$$\boxed{\ddot{X} = 0} \quad , \quad (m_1 - m_2)\ddot{X} - 2\mu\ddot{x} = 2k(x - a) \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{k}{\mu}$$

Allgemeine Lösungen:

$$X(t) = v_0 t + X_0 \quad , \quad x(t) = A \cos(\omega_0 t - \varphi_0) + a$$

c) Energie:

$$E = \frac{1}{2}m_1(\dot{X} - \frac{m_2}{M}\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{X} + \frac{m_1}{M}\dot{x})^2 + V(x) = \frac{1}{2}M(\dot{X})^2 + \frac{1}{2}\mu(\dot{x})^2 + V(x) \quad , \quad V(x) = \frac{k}{2}(x-a)^2$$

Lösung einsetzen:

$$\dot{X} = v_0 \quad , \quad \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t - \varphi_0)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}A^2[\underbrace{\mu\omega_0^2}_{=k} \sin^2(\omega_0 t - \varphi) + k \cos^2(\omega_0 t - \varphi)] + \frac{1}{2}M(v_0)^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}A^2k + \frac{1}{2}Mv_0^2 = \text{const.}$$

Wie zu verlangen, ist die Energie konstant (erhalten).

2 a)

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{e}_r|^2 = 1 \quad , \quad |\mathbf{e}_\varphi|^2 = 1 \quad , \quad \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \checkmark$$

Ableitungen der *zeitabhängigen* Einheitsvektoren:

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad , \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix} = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r$$

Newton: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\ddot{\mathbf{r}}$;

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{r}) = m[(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi]$$

b) Drehimpuls:

$$\mathbf{L} = m[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}] = m[(r\mathbf{e}_r) \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi)] = mr\dot{r}[\underbrace{\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r}_{=0}] + mr^2\dot{\varphi}[\underbrace{\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi}_{=\mathbf{e}_z}]$$

$$\Rightarrow \mathbf{L} = mr^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_z \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_z$$

c)

Zentralkraft: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\mathbf{e}_r$

Erhaltung:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = m\mathbf{e}_z \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \mathbf{e}_z mr[2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}]$$

Bewegungsgleichung: $\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_\varphi$ sind orthogonal, also:

$$F(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \quad , \quad 0 = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\mathbf{L} = 0$$

Das heißt, für eine reine Zentralkraft ist der Drehimpuls immer erhalten.

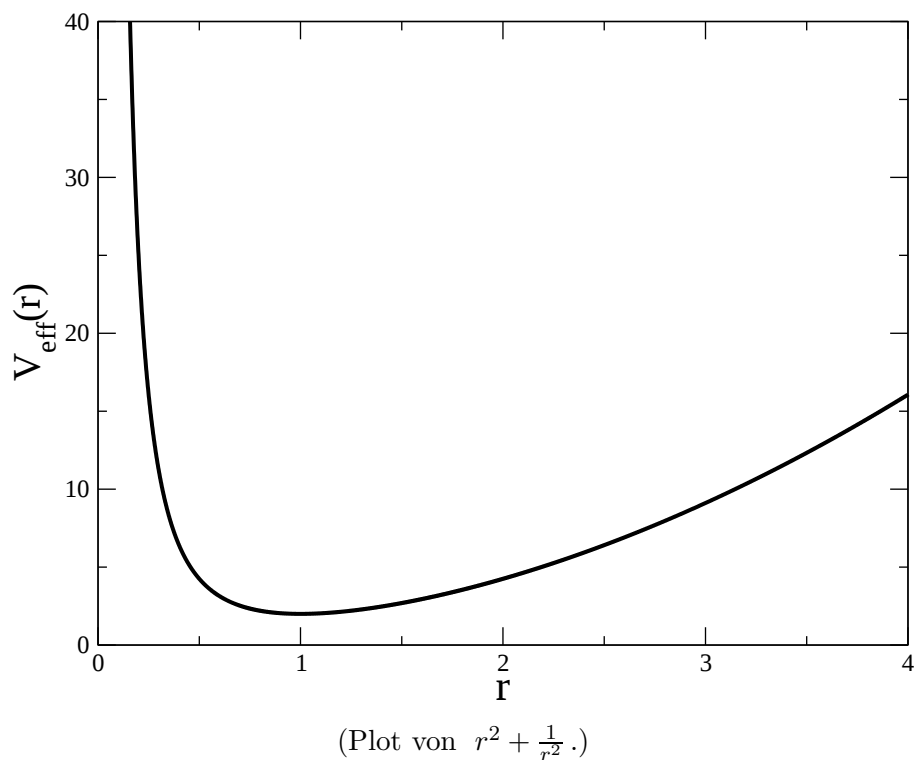
Winkel eliminieren $\rightarrow$ radiale Bewegungsgleichung:

$$L = |\mathbf{L}| = mr^2\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad (\dot{\varphi})^2 = \frac{L^2}{m^2r^4}$$

$$\Rightarrow \quad F(r) = m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{r} = F_{eff}(r) \quad , \quad F_{eff}(r) = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}}$$

d)

$$F(r) = -kr \quad \Rightarrow \quad F_{eff}(r) = -kr + \frac{L^2}{mr^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{eff}(r) = \frac{k}{2}r^2 + \frac{L^2}{2mr^2}}$$



Im Gegensatz zur Gravitation sind hier nur gebundene Bewegungen möglich.

Es handelt sich hier um einen 2-dimensionalen Oszillator, denn in kartesischen Koordinaten lautet die Bewegungsgleichung:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -kr\mathbf{e}_r = -k \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kx \\ -ky \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \\ m\ddot{y} &= -ky \end{aligned}$$

Dieser reduziert sich durch die Drehimpulserhaltung auf ein effektives 1-dimensionales Problem, allerdings ist dies kein harmonischer Oszillator mehr, siehe $F_{eff}(r)$!

3 a) Schwerpunkt:

$$M\mathbf{R} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2, \quad M = m_1 + m_2, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

Gesamtdrehimpuls: Wenn Schwerpunkt in Ruhe, also $\dot{\mathbf{R}} = 0$, dann gilt nach Vorlesung:

$$\mathbf{L} = \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}), \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

Wie in Aufg. 2 folgt für den Drehimpuls nach Einführen von Polarkoordinaten:

$$\mathbf{L} = \mu r^2 \dot{\varphi} \mathbf{e}_z = \mu l^2 \omega_0 \mathbf{e}_z$$

Energie:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{\mathbf{r}}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\mathbf{r}}_2)^2 = \frac{1}{2}M(\dot{\mathbf{R}})^2 + \frac{1}{2}\mu(\dot{\mathbf{r}})^2$$

nach Vorlesung oder durch Einsetzen;

$$\dot{\mathbf{R}} = 0, \quad (\dot{\mathbf{r}})^2 = (\dot{r})^2 + r^2(\dot{\varphi})^2 = l^2\omega_0^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}\mu l^2\omega_0^2$$

unter Verwendung von 2 a).

b) Wir betrachten den Zeitpunkt unmittelbar nach dem Riß der Stange:

Die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ sind natürlich tangential auf dem Kreis, den die Masse m_1 bzw. m_2 bis zum Riß der Stange beschrieben hat, also senkrecht zur Verbindungslinie der Massen und antiparallel zueinander.

Das sollte aber aus der Rechnung rauskommen, ohne vorher reingesteckt worden zu sein !

Also:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2, \quad \mathbf{L}_1 = m_1(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1), \quad \mathbf{L}_2 = m_2(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2)$$

Drehimpulserhaltung (Betrag und Richtung):

$$m_1(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) + m_2(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2) = \mu l^2 \omega_0 \mathbf{e}_z$$

Gesamtimpulserhaltung (Schwerpunkt bleibt in Ruhe):

$$M\dot{\mathbf{R}} = 0 \quad , \quad m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{v}_1}$$

Einsetzen in Drehimpulserhaltung

$$\Rightarrow \quad m_1(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) - m_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_1) = \mu l^2 \omega_0 \mathbf{e}_z \quad \Rightarrow \quad -m_1(\mathbf{r} \times \mathbf{v}_1) = \mu l^2 \omega_0 \mathbf{e}_z$$

Damit links $\mathbf{e}_z$ rauskommt, muß $\mathbf{v}_1$ wie $\mathbf{r}$ in der x - y -Ebene liegen,

$$\Rightarrow \quad \mathbf{r} \times \mathbf{v}_1 = |\mathbf{r}||\mathbf{v}_1| \sin(\varphi_1) = -\frac{\mu}{m_1} l^2 \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1 \sin(\varphi_1) = -\frac{\mu}{m_1} l \omega_0}$$

mit $|\mathbf{r}| = l$, $v_1 = |\mathbf{v}_1|$ und dem Winkel φ_1 zwischen $\mathbf{v}_1$ und der Stange im Moment des Risses.

Energie unmittelbar nach dem Riß:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2)^2 \quad , \quad v_2^2 = \frac{m_1^2}{m_2^2} v_1^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{\mu} v_1^2$$

Energieerhaltung:

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{\mu} v_1^2 = \frac{1}{2} \mu l^2 \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1 = \frac{\mu}{m_1} l \omega_0}$$

Das einsetzen

$$\Rightarrow \quad \frac{\mu}{m_1} l \omega_0 \sin(\varphi_1) = -\frac{\mu}{m_1} l \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin(\varphi_1) = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \frac{3}{2}\pi = -\frac{\pi}{2}}$$

Für $\mathbf{v}_2$ ergibt sich dann mit der Schwerpunktimpulserhaltung von oben

$$\boxed{v_2 = \frac{\mu}{m_2} l \omega_0 \quad , \quad \varphi_2 = +\frac{\pi}{2}}$$

Die Richtungen sind also wie erwartet; die Beträge werden für $m_1 = m_2$ gleich.