UNIVERSITÄT KARLSRUHE WS 2005/06
INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann **27.01.06**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre theorie-a@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochh. Zi. 10.13

Übungsblatt Nr. 12 zur Vorlesung Theorie A

$\boxed{1}$ Zwei Punktmassen 1 und 2 mit $m_1 = m_2 = m$ bewegen sich ohne äußere Kräfte auf den Bahnkurven $\mathbf{r}_1(t) = (\frac{c}{2}t^2\,,\ bt\,,\ -\frac{c}{2}t^2)$, $\mathbf{r}_2(t) = (-\frac{c}{2}t^2\,,\ 2bt\,,\ \frac{c}{2}t^2)$.

a) Man bestimme Bahnkurve $\mathbf{R}(t)$ und Impuls $\mathbf{P}(t)$ des Schwerpunktes, sowie Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ und Impuls $\mathbf{p}(t)$ der Relativbewegung von Masse 2 bezüglich Masse 1.
Welche Kraft übt 2 auf 1 aus?

b) Berechne den Drehimpuls $\mathbf{L}$ der Relativbewegung.
Verläuft die Relativbewegung in einer Ebene?
Gilt der Flächensatz (2. Keplersches Gesetz)?

$\boxed{2}$ In Polarkoordinaten r, φ ist eine Planetenbahn in der x-y-Ebene gegeben durch

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\varphi)} \quad , \quad 0 \le \epsilon < 1 \quad , \quad p > 0$$

a) Zeige, daß diese in kartesischen Koordinaten die Form $\left(\frac{x+f}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ annimmt, und bestimme a, b, f .

b) Was ergibt sich für $\epsilon > 1$ bzw. $\epsilon = 0$? Skizziere jeweils die Bahn.

$\boxed{3}$ Eine Punktmasse m bewegt sich in dem dreidimensionalen Potential $V(\mathbf{r}) = \frac{D}{2}r^2$, $r = |\mathbf{r}|$. (Wie könnte dieses physikalisch realisiert werden?)

a) Bestimme die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, und gebe die Bewegungsgleichung für $\mathbf{r}(t)$ und deren allgemeine Lösung in *kartesischen* Koordinaten an. Wie groß ist die Anzahl der Integrationskonstanten?

b) Berechne die Gesamtenergie E und den Drehimpulsvektor $\mathbf{L}$ für die allgemeine Lösung aus **a)**. Sind E und $\mathbf{L}$ Erhaltungsgrößen?

c) Wir können annehmen, daß die Bewegung der Punktmasse in der x-y-Ebene stattfindet. Warum? Man zeige für den Spezialfall $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$, daß die Bahnkurve in der x-y-Ebene durch eine Ellipse gegeben ist, und bestimme deren Halbachsen.

d) Welche der Keplerschen Gesetze gelten hier? Begründung!

$\boxed{4}$ Für eine Punktmasse m im Gravitationspotential $V(\mathbf{r}) = -k/|\mathbf{r}|$ gibt es eine weitere Erhaltungsgröße (neben E und $\mathbf{L}$), den Lenzschen Vektor $\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\frac{1}{k}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right) = const.$
Damit läßt sich die Bahnkurve bestimmen:

a) Man nehme an, daß sich $\mathbf{r}$ und $\dot{\mathbf{r}}$ in der x-y-Ebene befinden (warum geht das?), und berechne die Vektoren $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\mathbf{L}$ in Polarkoordinaten $r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}$.

b) Man nehme an, daß $\boldsymbol{\varepsilon} || \mathbf{e}_x$ (warum geht das?), und bestimme aus $\mathbf{L} = (0, 0, L) = const.$ und $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon, 0, 0) = const.$ die Bahn $r(\varphi)$.

— Besprechung in den Übungsgruppen am Freitag, den 03.02.06 —