

1 a)

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}bt \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P} = 2m\dot{\mathbf{R}} = 3mb \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Masse 2 bzgl. 1: } \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -ct^2 \\ bt \\ ct^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{p} = \mu \dot{\mathbf{r}} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -mct \\ \frac{m}{2}b \\ mct \end{pmatrix}$$

Kraft, die Masse 1 fühlt (oder spürt): Newton:

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = mc \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{L} = \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -ct^2 \\ bt \\ ct^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -mct \\ \frac{m}{2}b \\ mct \end{pmatrix} = \frac{m}{2}bct^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bewegung verläuft in einer Ebene, denn die Richtung $\mathbf{L}/|\mathbf{L}| = \text{const.}$

Der Flächensatz gilt nicht, denn $\dot{A} = \frac{|\mathbf{L}|}{2\mu} \neq \text{const.}$

2 a)

$$x = r \cos(\varphi) \quad , \quad y = r \sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{x}{r}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon x/r} \quad \Rightarrow \quad r + \varepsilon x = p \quad \Rightarrow \quad r^2 = (p - \varepsilon x)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = (p - \varepsilon x)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2(1 - \varepsilon^2) + 2p\varepsilon x + y^2 = p^2}$$

Gewünschtes Ergebnis:

$$\left(\frac{x+f}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow (x+f)^2 \frac{b^2}{a^2} + y^2 = b^2 \Rightarrow x^2 \frac{b^2}{a^2} + 2f \frac{b^2}{a^2} x + y^2 = b^2 \left(1 - \frac{f^2}{a^2}\right)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2, \quad f \frac{b^2}{a^2} = p\varepsilon \Rightarrow \boxed{f = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}}$$

$$\text{und } b^2 - f^2 \frac{b^2}{a^2} = p^2 \Rightarrow b^2 = p^2 + f^2(1 - \varepsilon^2) = p^2 + \frac{p^2 \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \Rightarrow \boxed{b^2 = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}}$$

$$\text{damit } \Rightarrow a^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2} \Rightarrow \boxed{a^2 = \frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}}$$

Es gilt nun

$$\boxed{0 \leq \varepsilon < 1} \Rightarrow (1 - \varepsilon^2) > 0 \Rightarrow \boxed{f = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}}$$

Dies ist eine Ellipse mit den Halbachsen $a > 0, b > 0$ und der Brennweite $f > 0$; der Ursprung des x - y -Koordinatensystems liegt offenbar in einem der Brennpunkte. Dies sollte man doch mal skizzieren!

b)

$$\boxed{\varepsilon > 1} \Rightarrow b = \frac{1}{i} \underbrace{\frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}}_{=\bar{b}}, \quad a = -\underbrace{\frac{p}{\varepsilon^2 - 1}}_{=\bar{a}}, \quad f = -\underbrace{\frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}}_{=\bar{f}}$$

Das eingesetzt ergibt diesmal eine Hyperbel mit den reellen und positiven Parametern $\bar{a}, \bar{b}, \bar{f}$:

$$\boxed{\left(\frac{x - \bar{f}}{\bar{a}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\bar{b}}\right)^2 = 1}, \quad \boxed{\bar{a} = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}, \quad \bar{b} = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}, \quad \bar{f} = \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}}$$

$$\boxed{\varepsilon = 1} \Rightarrow r = \frac{p}{1 + \cos(\varphi)} = \frac{p}{1 + x/r} \Rightarrow r = p - x$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = p^2 + x^2 - 2px \Rightarrow \boxed{x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}}$$

Dies ist eine Parabel (Kometenbahn).

3 System: Massepunkt an einer Feder, die im Ursprung befestigt ist: 3-dimensionaler Oszillator.

a)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\frac{D}{2}\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = -D\mathbf{r}$$

$$\Rightarrow m\ddot{\mathbf{r}} = -D\mathbf{r} \Rightarrow \boxed{\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0 \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m}}$$

Allgemeine Lösung:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A} \cos(\omega_0 t) + \mathbf{B} \sin(\omega_0 t)$$

$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sind *Vektoren*, es gibt 6 Integrationskonstanten, zwei für jede Richtung x , y , z . Beim 3-dimensionalen Oszillator sind die drei Raumrichtungen völlig entkoppelt, daher die einfache Lösung; im allgemeinen (z.B. Kepler) ist das nicht so!

b)

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}})^2 + V(\mathbf{r}) \quad , \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = -\omega_0\mathbf{A} \sin(\omega_0 t) + \omega_0\mathbf{B} \cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m\omega_0^2(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2) = \text{const.}$$

E ist zeitlich konstant (aber natürlich von den Anfangsbedingungen abhängig).

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \\ &= m\omega_0[\mathbf{A} \cos(\omega_0 t) + \mathbf{B} \sin(\omega_0 t)] \times [-\mathbf{A} \sin(\omega_0 t) + \mathbf{B} \cos(\omega_0 t)] \\ &= m\omega_0[-(\underbrace{\mathbf{A} \times \mathbf{A}}_{=0}) \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) + (\underbrace{\mathbf{B} \times \mathbf{B}}_{=0}) \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) + \\ &\quad + (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cos^2(\omega_0 t) - (\underbrace{\mathbf{B} \times \mathbf{A}}_{=0}) \sin^2(\omega_0 t)] \\ &= -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{L} = m\omega_0[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \text{const.}$$

c) Da der Drehimpuls erhalten ist, findet die Bewegung in einer Ebene statt, o.B.d.A. der x - y -Ebene. D.h., $z(t) = 0$. Mit den Anfangsbedingungen für den Spezialfall heißt das:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \quad , \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Daraus

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{v_0/\omega_0}\right)^2 = \cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1$$

Dies ist eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a = |x_0| \quad , \quad b = \left|\frac{v_0}{\omega_0}\right|$$

Der Ursprung liegt allerdings nicht im Brennpunkt, sondern im Zentrum der Ellipse ($f = 0$).

d) Kepler 1: Bahnkurven sind Ellipsen mit Sonne im Brennpunkt: Gilt schon, aber nicht streng, da die "Sonne" (Ursprung) eben nicht im Brennpunkt liegt.

Kepler 2: Flächensatz gilt, da Betrag und Richtung von $\mathbf{L}$ erhalten sind.

Kepler 3: T^2/a^3 hat für alle Planeten den gleichen Wert, ist also unabhängig von den Anfangsbedingungen. Das gilt tatsächlich nur für das Gravitations- (Coulomb-) Potential: Hier:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\omega_0^2 |x_0|^3},$$

dies hängt von der Anfangsbedingung x_0 ab.

4 Da $\mathbf{L} = \text{const.}$, können wir $\mathbf{L} \parallel \mathbf{e}_z$ wählen, und damit ist $\mathbf{r} \perp \mathbf{L}$ und $\dot{\mathbf{r}} \perp \mathbf{L}$.

a) Polarkoordinaten:

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = r \mathbf{e}_r \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = mr^2 \dot{\varphi} \underbrace{(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi)}_{=\mathbf{e}_z} = mr^2 \dot{\varphi} \mathbf{e}_z$$

... das wußten wir schon.

$$(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) = mr^2 \dot{\varphi} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{e}_z) = mr^2 \dot{\varphi} [\dot{r}(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z) + r \dot{\varphi}(\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z)]$$

$$(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{e}_\varphi$$

$$(\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_r$$

$$\Rightarrow (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) = mr^2 \dot{\varphi} [-\dot{r} \mathbf{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_r]$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{k} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) - \mathbf{e}_r = \frac{m}{k} r^2 \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \dot{r} \sin(\varphi) + r \dot{\varphi} \cos(\varphi) \\ -\dot{r} \cos(\varphi) + r \dot{\varphi} \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Offenbar liegt $\boldsymbol{\varepsilon}$ in der x - y -Ebene. Da $\boldsymbol{\varepsilon}$ nun angeblich eine Erhaltungsgröße ist, können wir $\boldsymbol{\varepsilon}$ in der x - y -Ebene frei wählen, z.B. $\boldsymbol{\varepsilon} \parallel \mathbf{e}_x$. Die Erhaltungssätze für $\mathbf{L}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ nehmen dann die

folgende Form an:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix} = mr^2\dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}}$$

... wie üblich ($L = \text{const.}$, nicht etwa $\dot{\varphi}$!)

Und:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{m}{k}r^2\dot{\varphi}[\dot{r}\sin(\varphi) + r\dot{\varphi}\cos(\varphi)] - \cos(\varphi) &= \varepsilon \\ \frac{m}{k}r^2\dot{\varphi}[-\dot{r}\cos(\varphi) + r\dot{\varphi}\sin(\varphi)] - \sin(\varphi) &= 0 \end{aligned}$$

Damit kann man jetzt $\dot{r}$ eliminieren:

$$\left| \begin{aligned} \cdot \cos(\varphi) &\Rightarrow \frac{m}{k}r^2\dot{\varphi}[\dot{r}\sin(\varphi)\cos(\varphi) + r\dot{\varphi}\cos^2(\varphi)] - \cos^2(\varphi) = \varepsilon\cos(\varphi) \\ \cdot \sin(\varphi) &\Rightarrow \frac{m}{k}r^2\dot{\varphi}[-\dot{r}\cos(\varphi)\sin(\varphi) + r\dot{\varphi}\sin^2(\varphi)] - \sin^2(\varphi) = 0 \end{aligned} \right.$$

Die *Summe* der letzten beiden Gleichungen liefert

$$\Rightarrow \frac{m}{k}r^3\dot{\varphi}^2 - 1 = \varepsilon\cos(\varphi) \Rightarrow \frac{L^2}{kmr} - 1 = \varepsilon\cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow \boxed{r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi)} \quad , \quad p = \frac{L^2}{mk}}$$

Der Betrag ε des Lenzschen Vektors ist also gerade die Exzentrizität der Ellipse (für eine Kreisbahn ist $\varepsilon = 0$), die Amplitude p ist durch den Drehimpuls bestimmt.