

1. Stammfunktionen:

$$\int dx \sin(x) = -\cos(x) \quad , \quad \int dx \cos(x) = \sin(x) \quad , \quad \int dx e^x = e^x \quad ,$$
$$\int dx \sqrt{x} = 2(x)^{3/2} \quad , \quad \int dx x^n = \frac{1}{n+1} x^{(n+1)}$$

2. Partielle Integration:

$$\int dx u(x) v'(x) = u(x) v(x) - \int dx u'(x) v(x)$$

Anwendung immer dann möglich, wenn man die Stammfunktion von $v'(x)$ kennt (die Ableitung von $u(x)$ ist in der Regel bekannt), und das Integral auf der rechten Seite einfacher ist als die linke Seite, oder ein Vielfaches der linken Seite ist. Bei der Wahl von u und v' muß man u.U. rumprobieren!

Substitution:

$$\int dx u'(x) f(u(x)) = \int du f(u) \equiv F(u) = F(u(x)) \quad \text{mit} \quad dx = \frac{1}{u'(x)} du$$

3. Skalarprodukt:

$$\mathbf{a} \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\varphi) = \mathbf{b} \mathbf{a}$$

Kreuzprodukt:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\varphi) \mathbf{e}_\perp = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

$\mathbf{e}_\perp$ ist der Vektor $\perp$ zu der von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Ebene, derart, daß $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{e}_\perp$ ein rechtshändiges System bilden (Schraubenregel).

4. Polarkoordinaten:

$$x = r \cos(\varphi) \quad , \quad y = r \sin(\varphi) \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

5. Komplexe Zahlen $z_1 = x + iy$ und $z_2 = u + iv$ gegeben:

$$|z_1| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad |z_2| = \sqrt{u^2 + v^2} \quad ,$$

$$z_1 z_2 = (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) \quad , \quad z_1 + z_2 = (x + u) + i(y + v) \quad ,$$

$$\bar{z}_1 = x - iy \quad , \quad \bar{z}_2 = u - iv \quad ,$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \quad , \quad \frac{1}{z_2} = \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2}$$

6. Komplexe Zahlen $z_1 = re^{i\varphi}$ und $z_2 = se^{i\theta}$ gegeben:

$$|z_1| = r \quad , \quad |z_2| = s \quad ,$$

$$z_1 z_2 = r s e^{i(\varphi+\theta)} \quad , \quad z_1 + z_2 = r e^{i\varphi} + s e^{i\theta} \quad ,$$

$$\bar{z}_1 = r e^{-i\varphi} \quad , \quad \bar{z}_2 = s e^{-i\theta} \quad ,$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \quad , \quad \frac{1}{z_2} = \frac{1}{s} e^{-i\theta}$$

Zusammenhang der Darstellungen:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{bzw.} \quad x = r \cos(\varphi) \quad , \quad y = r \sin(\varphi)$$

7. Verfahren:

(1) Exponentialansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$; alle linear unabhängigen Lösungen $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ damit bestimmen, allgemeine Lösung ist dann $x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) + Cx_3(t)$ mit $x_i(t) = e^{\lambda_i t}$. Die λ_i sind i.A. komplex.

(2) Wie (4) mit Exponentialansatz oder auch durch zweimaliges Integrieren beider Seiten falls die Stamm-Stammfunktion von $f(t)$ bekannt ist.

(3) Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{g(x)} = f(t)dt \quad \Rightarrow \quad \int dx \frac{1}{g(x)} = \int dt f(t) + \text{const.}$$

(4) Zuerst die allgemeine homogene ($f(t) \equiv 0$) Lösung $x_h(t)$ per Exponentialansatz besorgen, dann eine partikuläre Lösung $x_p(t)$ der inhomogenen Gleichung durch Ansatz vom Typ der rechten Seite (ggf. verschiedene Ansätze ausprobieren!) oder Variation der Konstanten bestimmen. Allgemeine Lösung $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.

8. Die sollte man unbedingt im Kopf haben:

$$\varphi(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = C \cos(\omega_0 t - \phi_0)$$

9. Anzahl der Integrationskonstanten entspricht der Ordnung der DGL; also:

(1) 3 Konstanten;

(2) 2

(3) 1

(4) 2

(5) 2

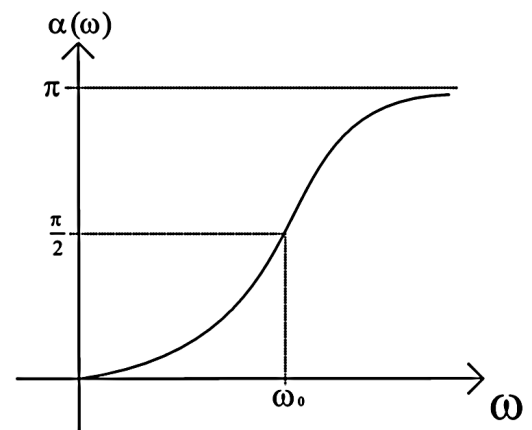
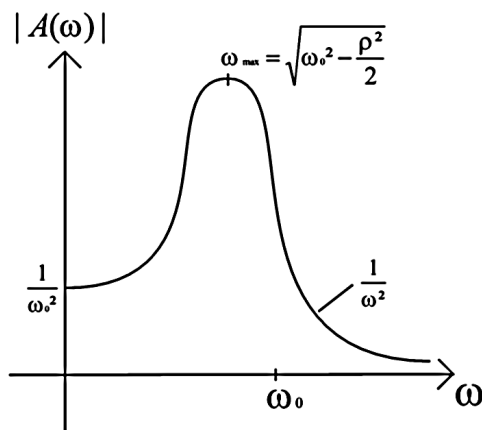
10. Die fundamentale (und sich stets zu merkende!!!) Näherung für kleine Winkel ist:

$$\sin(\varphi) \approx \varphi, \quad \cos(\varphi) \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$$

11. Anstatt Skizze eine Beschreibung:

Eine sinus-artige Schwingung, deren Hüllkurve exponentiell abfällt (also $\sim e^{-\gamma t}$). Diese geht bei $x(0) = 0$ los mit einer Anfangssteigung $\dot{x}(0) = v_0$. Die Periodendauer ist ungefähr $T = 2\pi/\omega_0$, aber nicht genau, wegen der Dämpfung.

12. Sieht ungefähr so aus:



13. Die δ -Funktion ist durch den Effekt unter dem Integral definiert:

$$\int_a^b dx f(x) \delta(x - y) = \begin{cases} f(y) & \text{falls } a < y \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Darstellung, z.B.:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

14. Die Greensche Funktion erfüllt die Bewegungsgleichung des Oszillators für eine δ -Kraft:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] G(t - t') = \delta(t - t')$$

15. $G(t - t')$ ist die Antwort (Auslenkung $x(t)$) des Oszillators auf einen Kraftimpuls $\delta(t - t')$ zur Zeit $t = t'$.

Der Nutzen ist, daß für jede beliebige äußere Kraft $f(t)$:

$$x(t) = \int dt' G(t - t') f(t')$$

16.

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x)$$

Das nach $\dot{x}$ auflösen, Trennung der Veränderlichen und Integration beider Seiten ($V(x)$ muß wohl jetzt eingesetzt werden). E ist eben eine Konstante, zusammen mit der Integrationskonstanten gibt es also zwei Konstanten, die durch die beiden Anfangsbedingungen $x(0)$, $\dot{x}(0)$ (die Bewegungsgleichung wäre ja 2. Ordnung) festgelegt werden.

17. Man muß den Weg $\mathbf{r}$ geeignet parametrisieren, z.B. durch $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$, und das *Wegintegral* berechnen:

$$A = \int_{r_a}^{r_b} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau \frac{d\mathbf{r}(\tau)}{d\tau} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\tau))$$

Folgt der Weg stückweise den Koordinatenachsen, kann man auch (stückweise) direkt integrieren (ohne Parametrisierung).

18. Kriterien für ein konservatives Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$: (i): die geleistete Arbeit ist bei festgehaltenen Endpunkten $\mathbf{r}_a$, $\mathbf{r}_b$ unabhängig vom Weg; (ii): die geleistete Arbeit über einen beliebigen geschlossenen Weg ist null; (iii): das Kraftfeld ist wirbelfrei, $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

19. Natürlich gilt Energieerhaltung; aber auch Drehimpulserhaltung, denn aus dem Zentralpotential ergibt sich eine Zentralkraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\mathbf{e}_r$ (nachrechnen!). Beweis: Ausrechnen von $\frac{d}{dt}E$, $\frac{d}{dt}\mathbf{L}$ unter Verwendung der Bewegungsgleichung (nachrechnen!).

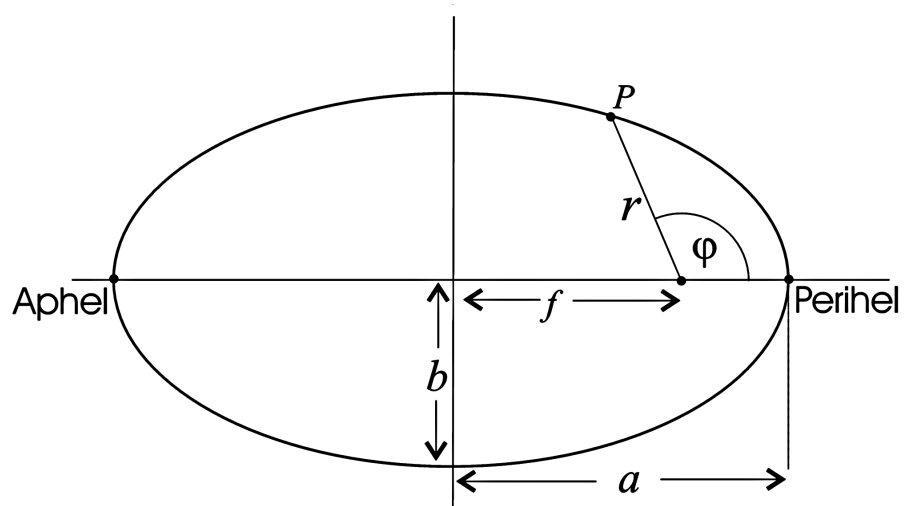
20. Ohne äußere Kräfte ist die Kraft gem. Newton von einem Massepunkt zum anderen gerichtet. Für die Bewegungsgleichungen führt man Schwerpunkt- und Relativkoordinaten ein. Dann ist die Schwerpunktbewegung kräftefrei. Erhaltungsgrößen: Schwerpunktimpuls, Gesamtenergie, und Drehimpuls, denn da die Kraft nur vom Abstand abhängt und $\parallel$ zur Verbindungsachse der Massen gerichtet ist, erfolgt die Relativbewegung in einer Zentralkraft. (Für den Spezialfall der Gravitationskraft gibt es außerdem noch den Lenzschen Vektor als Erhaltungsgröße.)

21. Kepler 1: die Relativbewegung ist eine Ellipse mit Sonne (eigentlich Ursprung = Schwerpunkt) im Brennpunkt. Gilt so nur für Gravitation, im Allgemeinen ist die Bahn nicht eine geschlossene Ellipse, und/oder der Ursprung liegt nicht im Brennpunkt.

Kepler 2: Flächensatz. Gilt immer, denn im Zweikörper-Problem erfolgt die Relativbewegung immer in einer Zentralkraft und der Drehimpuls ist erhalten.

Kepler 3: $T^2/a^3 = \text{const.}$ unabhängig von den Anfangsbedingungen. Gilt nur für Gravitation.

22. Die typische Planetenbahn (für eine Gravitationskraft also) ist eine Ellipse:



mit

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x+f}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1$$