Theoretische Physik A

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila
www-ttp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/Uebungen

WS 07/08 – Blatt 01
Besprechung: 26.10.2007

Aufgabe 1: Hyperbelfunktionen
Die Hyperbelfunktionen sinh und cosh sind in folgendermaßen definiert:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Zeigen Sie:
(i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh x = \cosh x$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh x = \sinh x$
(iii) Die Umkehr Funktion Arsinh (*Area-Funktion*) läßt sich wie folgt berechnen:

$$\mathrm{Arsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2+1}),$$

d.h., falls $y = \sinh x$, dann ist $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.
(iv) $\int \mathrm{d}x \cosh^2 x = \frac{1}{2}(x + \sinh x \cosh x)$.

Aufgabe 2:
(a) Skizzieren Sie die folgenden Funktionen:

$$\text{(i)} \quad f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{(ii)} \quad f(x) = \ln|x| \qquad \text{(iii)} \quad f(x) = \sinh x$$

(b) Berechnen Sie:

$$\text{(i)} \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{n \ln x} \qquad \text{(ii)} \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} a^{x^2} \qquad \text{(iii)} \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} (\tan\theta \cdot \cos\theta) \qquad \text{(iv)} \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} (\sin^2(x^2+a))$$

(c) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\text{(i)} \ \int \mathrm{d}x \, \sin(ax) \qquad \text{(ii)} \ \int \mathrm{d}x \, e^{x/a} \qquad \text{(iii)} \ \int \mathrm{d}a \, \sqrt{a+3} \qquad \text{(iv)} \ \int_3^6 \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad \text{(v)} \ \int_0^4 \frac{x \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+9}}$$

Aufgabe 3: Substitutionsregel
Zeigen Sie durch Integration, dass

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}, \quad \text{falls} \quad a<0 \quad \text{und} \quad b^2-ac>0.$$

Möglicher Lösungsweg:
(a) Finden Sie eine Substitution der Form $y = x - x_0$, so dass

$$ax^2 + 2bx + c = a(y^2 - y_0^2)$$

Hierbei sind die Konstanten x_0 und y_0 zu bestimmen.
(b) Das resultierende Integral läßt sich mit Hilfe der Substitution $y = y_0 \sin\phi$ berechnen. Wo gehen die Bedingungen $a<0$ und $b^2-ac>0$ in die Rechnung ein?

Merkblatt

Anmeldung

Die Anmeldung für ein Tutorium zur Vorlesung **Theoretische Physik A** im Wintersemester 2007/2008 erfolgt durch das Webformular:

`www.physik.uni-karlsruhe.de/3Block1.php/Tutorium/WS0708/TheorieA/`

Sie können sich bis zum Donnerstag, 25.10.2007, 12:00 Uhr anmelden.
Die tatsächliche Einteilung der Tutorien wird am 25.10.2007 nach 16:00 Uhr durch Aushang am Eingang des Physikhochhauses sowie auf oben genannter Webseite bekannt gegeben.

Übungsbetrieb

Die Übungen zur Vorlesung Theoretische Physik A finden freitags um 8:00 Uhr, um 9:45 Uhr und um 11:30 Uhr statt. Der reguläre Übungsbetrieb beginnt am 26.10.2007.
Die Übungsblätter enthalten Aufgaben, die mit einem Stern (*) gekennzeichnet sind. Diese müssen bis Dienstag 12:00 Uhr der folgenden Woche bearbeitet und in den gekennzeichneten Kasten am Eingang des Hochhauses eingeworfen werden. Die Aufgaben werden am darauf folgenden Freitag in den Tutorien besprochen.

Beratungstutorium

Ein Beratungstutorium findet montags von 14:30 Uhr bis 16:00 Uhr im Raum 3/1 statt. Der erste Termin ist am Montag, 29.10.2007.

Klausur

Die Klausur findet am Montag, den 11.02.2008, von 17:00 Uhr bis 19:00 Uhr im Gerthsen-Hörsaal statt. Zu Beginn des SS08 findet eine Nachklausur statt.

Scheinkriterien

Um einem Schein zu erhalten, müssen Sie:

1. mindestens 50% der Punkte in den Übungen

und

2. mindestens 50% der Punkte in der Klausur (bzw. Nachklausur) erreichen.

Die Orientierungsprüfung in theoretischer Physik ist bestanden, wenn in der Klausur (bzw. Nachklausur) 30% der möglichen Punkte erzielt werden.

22.10.07

Theo A

WS 07/08 - Blatt 01

Aufgabe 1: Hyperbelfunktionen

I $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 \cdot e^0 + e^{-2x}}{4}$$

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - 2 \cdot e^0 + e^{-2x}}{4}$$

$$\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = \underline{\underline{1}} \checkmark$$

II a) $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x}$$

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} = \underline{\underline{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}} \checkmark$$

b) $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} = \underline{\underline{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}} \checkmark$$

III $\operatorname{Arsinh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$

falls $y = \sinh x$, dann ist $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$

$$\rightarrow \ln\left(\sinh x + \underbrace{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}_{\cosh^2 x}\right) = \ln\left(\underbrace{\sinh x + \cosh x}_{\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}}\right) = \ln(e^x) = \underline{\underline{x}} \checkmark$$

Aufgabe 3: Substitutionsregel

a) $ax^2+2bx+c = a(y^2-y_0^2)$

$y = x - x_0$

$\frac{dy}{dx} = 1 \Leftrightarrow \quad dy = dx$

$ax^2+2bx+c = a(y^2+y_0^2)$

$ax^2+2bx+c = a((x-x_0)^2+y_0^2)$

$\cancel{ax^2}+2bx+c = \cancel{ax^2}-2axx_0+ax_0^2+ay_0^2$

$2bx+c = ax_0^2+ay_0^2-2axx_0$

Koeffizientenvergleich:

$2bx = -2axx_0 \Rightarrow \underline{\underline{x_0 = -\frac{b}{a}}}$ (beide x^1)

$\Rightarrow 2bx+c = a\cdot(-\frac{b}{a})^2+ay_0^2-2ax\cdot(-\frac{b}{a})$

$\Leftrightarrow \cancel{2bx}+c = \frac{b^2}{a}+ay_0^2+\cancel{2bx}$

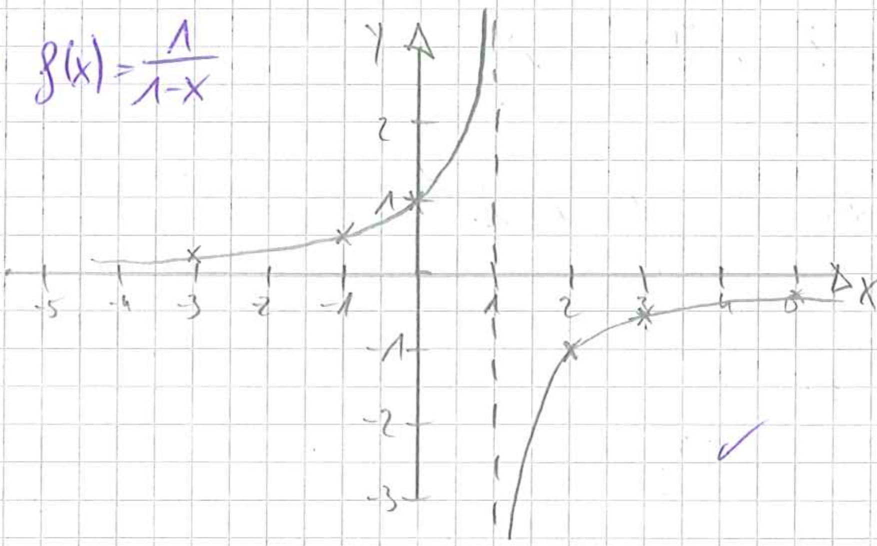
$\Leftrightarrow ay_0^2 = c-\frac{b^2}{a}$

$\Leftrightarrow y_0^2 = \frac{c}{a}-\frac{b^2}{a^2} \quad \Leftrightarrow y_0 = \sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{a^2}}$

$\Leftrightarrow y_0 = \sqrt{\frac{ac}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}} \quad \Leftrightarrow \underline{\underline{y_0 = \frac{\sqrt{b^2-ac}}{-a}}}$

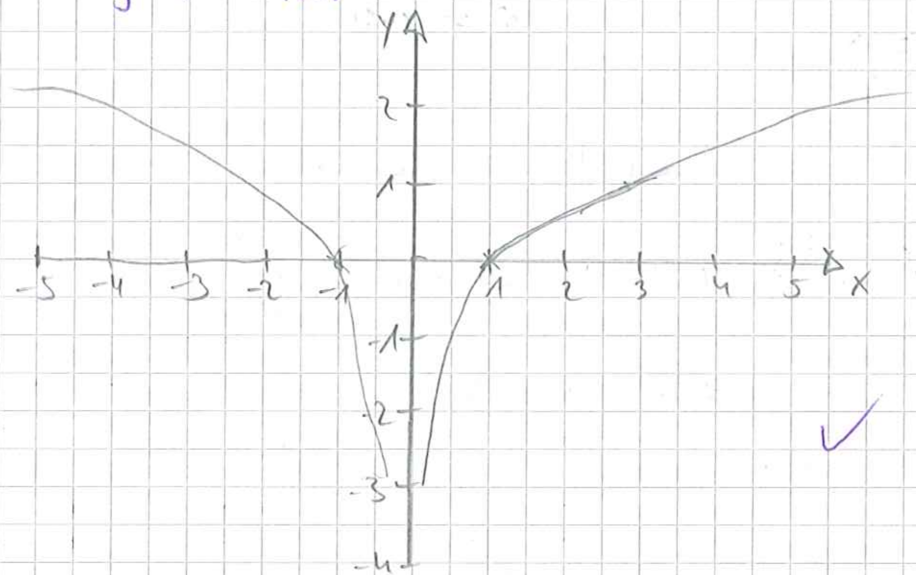
Aufgabe 2:

a) I $f(x) = \frac{1}{1-x}$



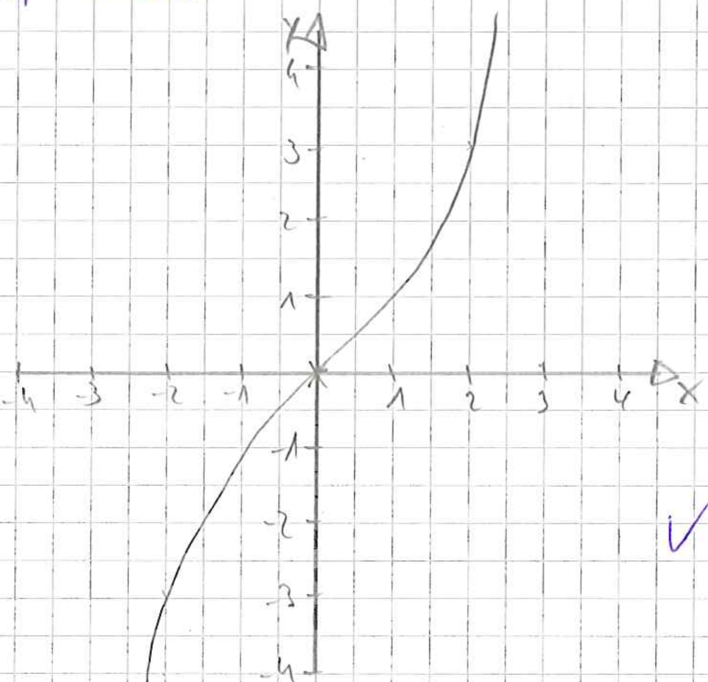
✓

II $f(x) = \ln|x|$



✓

III $f(x) = \sinh x$



✓

Aufgabe 2

b) I $\quad \frac{d}{dx} e^{n \ln x} = \frac{d}{dx} x^n = \underline{\underline{n \cdot x^{n-1}}}$ ✓

II $\quad \frac{d}{da} a^{x^2} = \underline{\underline{x^2 \cdot a^{x^2-1}}}$ ✓

III $\quad \frac{d}{d\theta}(\tan\theta \cdot \cos\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}} \cdot \cancel{\cos\theta}\right)$

$= \frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \underline{\underline{\cos\theta}}$ ✓

IV $\quad \frac{d}{da}\left(\sin^2(x^2+a)\right) = 2\cos(x^2+a)\cdot\sin(x^2+a)$

Produktregel ✓

c) I $\quad \int dx \, \sin(ax) \Rightarrow F(x) = -\cos(ax)\cdot\frac{1}{a} = \underline{\underline{-\frac{\cos(ax)}{a}}}$ ✓

II $\quad \int dx \, e^{\frac{x}{a}} \Rightarrow F(x) = e^{\frac{x}{a}} \cdot a = \underline{\underline{a e^{\frac{x}{a}}}}$ ✓

III $\quad \int da \sqrt{a+3} = \int da \, (a+3)^{0,5}$

$\Rightarrow F(a) = (a+3)^{1,5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\cdot(a+3)^{3/2}}{3} = \frac{2\cdot(a+3)^{\frac{1}{2}\,3}}{3} = \underline{\underline{\frac{2\cdot\sqrt{a+3}^{\,3}}{3}}}$ ✓

IV $\quad \int_3^6 \frac{dx}{x} = \left[\log|x| + C\right]_3^6 = (\ln 6 + C) - (\log 3 + C)$

$= \ln 6 + C - \log 3 - C = \ln 6 - \log 3 = \ln\frac{6}{3}$

$= \underline{\underline{\ln 2}}$ ✓

V $\quad \int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+9}} =$

NR: $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+9} = \frac{d}{dx}(x^2+9)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^2+9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = (x^2+9)^{-\frac{1}{2}} \cdot x$

$\Rightarrow \int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+9}} = \sqrt{x^2+9}\,\Big|_0^4 = \sqrt{25} - \sqrt{9} = \underline{2}$

26.10.07 **Theo A Tut**

E-Mail: do.epp@gmx.de

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

IV $\int dx \cosh^2 x = \frac{1}{2}(x + \sinh x \cosh x)$

$\Rightarrow \int dx \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} = \frac{1}{4}\int dx\, e^{2x} + \frac{1}{4}\int dx\, e^{-2x} + \frac{1}{2}\int dx$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4}}_{\cosh x \sinh x} + x\Big)$

$\sinh x \cosh x = \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4}$

$\Rightarrow \int dx \cosh^2 x = \frac{1}{2}(x + \sinh x \cosh x)$

Aufgabe 3:

$y = x - x_0 : \; ax^2 + 2bx + c = a(y^2 - y_0^2)$

a) Konstanten bestimmen:

$ax^2 + 2bx + c = a((x - x_0)^2 - y_0^2)$

$ax^2 + 2bx + c = a(x^2 + x_0^2 - 2xx_0 - y_0^2)$

$ax^2 + 2bx + c = \cancel{}\; ax^2 - 2axx_0 + a(x_0^2 - y_0^2)$

Vgl: $a = a$; $2b = -2ax_0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{a}$, $c = a(x_0^2 - y_0^2)$

$\Rightarrow y_0^2 = \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\right) \rightarrow y_0 = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}}$

$\rightarrow y_0 = \pm \frac{1}{a}\sqrt{b^2 - ac} \underset{\substack{y_0 > 0 \\ \text{da } a < 0}}{\Rightarrow} y_0 = -\frac{1}{a}\cdot\sqrt{b^2 - ac}$

$y = x - x_0 = x + \frac{b}{a} \rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{a(y^2 - y_0^2)}}$

mit $y = y_0 \sin\phi \rightarrow \frac{dy}{d\phi} = y_0 \cos\phi \Rightarrow dy = y_0 \cos\phi \, d\phi$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{a(y^2-y_0^2)}} = \int \frac{y_0 \cos\phi \, d\phi}{\sqrt{a y_0^2 \underbrace{(\sin^2\phi - 1)}_{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}}} = \underbrace{\int \frac{y_0 \cos\phi \, d\phi}{\sqrt{-a y_0^2 \cos^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}}_{\text{gekürzt...}} \int d\phi$$

2. Substitution!
$y = y_0 \sin\phi$

$$\frac{1}{\sqrt{-a}} \int d\phi = \frac{1}{\sqrt{-a}} \cdot \phi \qquad y = y_0 \sin\phi \Rightarrow \phi = \arcsin\frac{y}{y_0}$$

Hinzufügen, dass man andere a kürzen kann

$$\frac{1}{\sqrt{-a}} \cdot \phi = \frac{1}{\sqrt{-a}} \cdot \arcsin\frac{y}{y_0} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{ax + \frac{b}{a}}{-\frac{1}{a}\sqrt{b^2-ac}} \qquad \text{NR: } \arcsin(-\phi) = -\arcsin\phi$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin\left(\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}\right)$$