Theoretische Physik A

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila
www-ttp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/Uebungen

WS 07/08 – Blatt 02
Abgabe: 30.10.2007
Besprechung: 02.11.2007

(*) Aufgabe 4 (10P): Integration

Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass

$$\int \sqrt{ax^2 + 2bx + c}\, dx = \frac{ac - b^2}{2a^{3/2}} \operatorname{Arsinh} \frac{ax + b}{\sqrt{ac - b^2}} + \frac{ax + b}{2a} \sqrt{ax^2 + 2bx + c}\,,$$

$a^{3/2}$

falls $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$. Möglicher Lösungsweg:

(a) Finden Sie eine Substitution der Form $y = x - x_0$, so dass

$$ax^2 + 2bx + c = a(y^2 + y_0^2)\,.$$

Hierbei sind die Konstanten x_0 und y_0 zu bestimmen.

(b) Das resultierende Integral läßt sich mit Hilfe der Substitution $y = y_0 \sinh \phi$ auf das Integral, das in der Aufgabe 1(iv) von Baltt 1 berechnet wurde, zurückführen.

(c) Durch Einsetzen von $\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$ erhält man die gewünschte Lösung.

(*) Aufgabe 5 (10P): Teilchen im Magnetfeld

Ein elektrisch geladenes Teilchen bewegt sich in einem räumlich und zeitlich konstanten Magnetfeld. Unter dem Einfluss der Lorentz-Kraft beschreibt das Teilchen eine Bahnkurve, welche durch folgende Parameterdarstellung gegeben wird

$$x(t) = R\cos(\omega t)\,, \qquad y(t) = R\sin(\omega t)\,, \qquad z(t) = h\frac{\omega t}{2\pi}\,.$$

(a) Skizzieren Sie die Bahnkurve.

(b) Geben Sie die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren an.

(c) Bestimmen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

(d) Berechnen Sie die zwischen $t = 0$ und einem beliebigem t_1 zurückgelegte Wegstrecke $l(t_1)$

$$l(t_1) = \int_0^{t_1} dt \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \int_0^{t_1} dt \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2}\,.$$

(e) Betrachten Sie nun den speziellen Fall der Bewegung auf einer Kreisbahn, d.h. $h = 0$. Wieviel Zeit braucht das Teilchen für einen kompletten Umlauf?

Aufgabe 6 : Bahnkurven

Ein Massenpunkt bewegt sich auf der Bahnkurve:

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)} & x(t) = vt\cos\theta\,, & y(t) = 0\,, & z(t) = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\,; \\
\text{(ii)} & x(t) = vt\,, & y(t) = y_0 \ln\left(\frac{vt}{y_0} + 1\right), & z(t) = 0\,; \\
\text{(iii)} & x(t) = vt\sin\omega t\,, & y(t) = vt\cos\omega t\,, & z(t) = 0\,;
\end{array}$$

(a) Skizzieren Sie die Bahnkurve.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge als Funktion der Zeit t, gemessen ab $t = 0$.

Theo A

WS 07/08 Blatt 02

Stefan Heitz
Matr.-Nr: 1421950
Tutoriumgruppe 12
Tutor: Marius Kist

Aufgabe 4: Integration

$$\int \sqrt{ax^2+2bx+c}\, dx = \frac{ac-b^2}{2a^{3/2}} \operatorname{Arsinh} \frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} + \frac{ax+b}{2a}\sqrt{ax^2+2bx+c}$$

a) $y = x - x_0$, $ax^2+2bx+c = a(y^2+y_0^2)$

$$ax^2+2bx+c = a(y^2+y_0^2)$$
$$ax^2+2bx+c = a((x-x_0)^2+y_0^2)$$
$$ax^2+2bx+c = a(x^2+x_0^2-2xx_0-y_0^2)$$
$$\cancel{ax^2}+2bx+c = \cancel{ax^2}-2axx_0+a(x_0^2-y_0^2)$$

Vgl: $2b = -2ax_0 \iff \boxed{x_0 = -\frac{b}{a}}$ ✓ 1P

$$c = a(x_0^2-y_0^2)$$
$$c = a\left(\frac{b^2}{a^2}-y_0^2\right)$$
$$\iff y_0^2 = \frac{ac-b^2}{a^2} \iff \boxed{y_0 = \sqrt{\frac{ac-b^2}{a^2}}}$$ ✓ 1P

$$y = x - x_0 = x + \frac{b}{a}$$

$$\int \sqrt{ax^2+2bx+c}\, dx = \int \sqrt{a(y^2+y_0^2)}\, dy$$

2P

b) $y = y_0 \sinh \phi$

$$\frac{dy}{d\phi} = y_0 \cdot \cosh\phi \Leftrightarrow dy = y_0 \cosh\phi \, d\phi$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{a(y^2+y_0^2)}\, dy \overset{\checkmark 1P}{=} \int \sqrt{a(y_0^2 \sinh^2\phi + y_0^2)}\, y_0 \cosh\phi \, d\phi$$

$$= \int \sqrt{a y_0^2 \underbrace{(\sinh^2\phi + 1)}_{\cosh^2\phi,\ \text{da}\ \cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1}}\, y_0 \cosh\phi \, d\phi$$

$$= \int \sqrt{a y_0^2 \cosh^2\phi}\, y_0 \cosh\phi \, d\phi$$

$$= y_0^2 \sqrt{a} \cdot \int \cosh^2\phi \, d\phi$$

$$= y_0^2 \sqrt{a} \cdot \frac{1}{2}(\phi + \sinh\phi \cosh\phi) \quad \checkmark \ 2P$$

$$= y_0^2 \sqrt{a} \cdot \frac{1}{2}\left(\phi + \sinh\phi \sqrt{1+\sinh\phi}\right.$$

c) $y = y_0 \sinh\phi \Leftrightarrow \sinh\phi = \frac{y}{y_0} = \dfrac{\frac{ax+b}{a}}{\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}} = \dfrac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}$ ✓ 1P

$$\sinh\phi = \frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} \Leftrightarrow \phi = \operatorname{Arsinh}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} \quad \checkmark \ 1P$$

einsetzen ergibt:

$$\int \sqrt{ax^2+2bx+c}\, dx = y_0^2 \sqrt{a} \cdot \frac{1}{2}\left(\phi + \sinh\phi \sqrt{1+\sinh^2\phi}\right)$$

$$= y_0^2 \sqrt{a} \cdot \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arsinh}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} + \frac{xa+b}{\sqrt{ac-b^2}} \sqrt{1+\left(\frac{(ax+b)^2}{ac-b^2}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{ac-b^2}{a^2} \sqrt{a} \left(\operatorname{Arsinh}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} + \frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} \sqrt{\frac{ac-b^2+x^2a^2+2abx+b^2}{ac-b^2}}\right)$$

$$= \frac{ac-b^2}{2a^{3/2}} \operatorname{Arsinh}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} + \frac{(ax+b)(ac-b^2)}{2a} \sqrt{\frac{ac+a^2x^2+2bax}{(ac-b^2)^2 a}} \quad \checkmark \ 1{,}5P$$

$$\int \sqrt{ax^2+2bx+c}\, dx = \frac{ac-b^2}{2a^{3/2}} \operatorname{Arsinh}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} + \frac{ax+b}{2a} \sqrt{ax^2+2bx+c} \quad \checkmark \ 1{,}5$$

8P

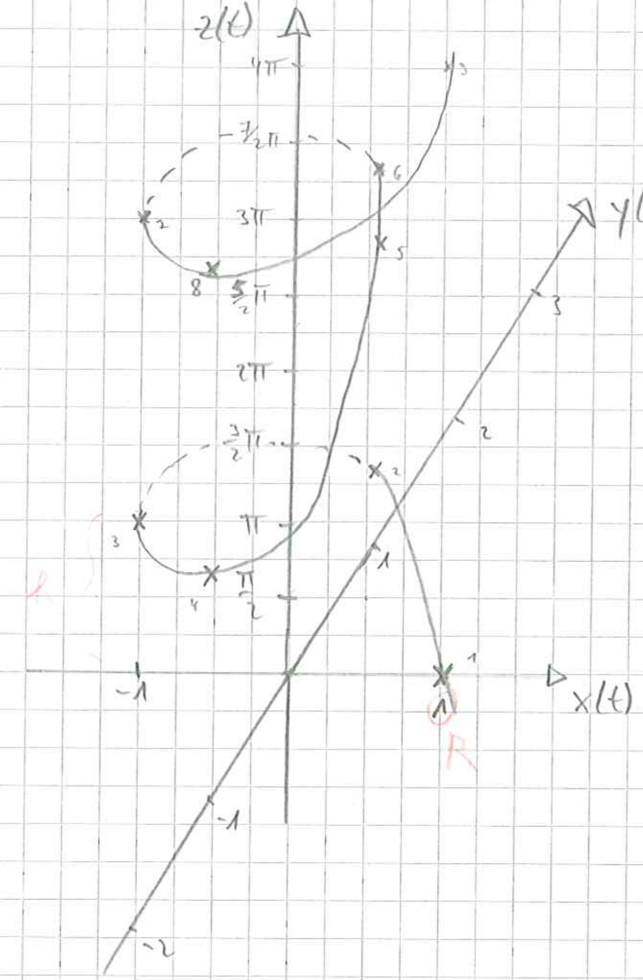
Aufgabe 5: Teilchen im Magnetfeld

$x(t) = R\cos(\omega t)$

$y(t) = R\sin(\omega t)$

$z(t) = h\frac{\omega t}{2\pi}$

a)



✓ 2P

b) $\dot{x}(t) = -R\omega\sin(\omega t)$; $\ddot{x}(t) = -R\omega^2\cos(\omega t)$

$\dot{y}(t) = R\omega\cos(\omega t)$; $\ddot{y}(t) = -R\omega^2\sin(\omega t)$

$\dot{z}(t) = \frac{R\omega}{2\pi}$; $\ddot{z}(t) = 0$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ R\omega\cos(\omega t) \\ \frac{R\omega}{2\pi} \end{pmatrix} \quad ✓\ 1{,}5P \quad ; \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t) \\ -R\omega^2\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad ✓\ 1{,}5P$$

c) $|\vec{v}| = \sqrt{(-R\omega\sin(\omega t))^2 + (R\omega\cos(\omega t))^2 + \left(\frac{R\omega}{2\pi}\right)^2}$

$= \sqrt{R^2\omega^2\sin^2(\omega t) + R^2\omega^2\cos^2(\omega t) + \frac{R^2\omega^2}{4\pi^2}}$

$= \omega\sqrt{R^2\sin^2(\omega t) + R^2\cos(\omega t) + \frac{R^2}{4\pi^2}}$

5P

$$|\vec{v}| = \omega\sqrt{R^2\left(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) + \frac{h^2}{4\pi^2 R^2}\right)}$$

$$= \omega\sqrt{R^2\left(1 + \frac{h^2}{4\pi^2 R^2}\right)}$$

$$= \omega\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}$$ ✓ 1P

d) $$\ell(t_1) = \int_0^{t_1} dt \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2} = \int_0^{t_1} dt \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$$

$$\ell(t_1) = \int_0^{t_1} |\vec{v}|\, dt$$

$$= \int_0^{t_1} dt \left(\omega\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\right)$$

$$= \omega\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} \int_0^{t_1} dt$$

$$= \underline{\underline{\omega \cdot t_1 \cdot \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}}}$$ ✓ 2P

✓ 0,5P

e) $h = 0 \Rightarrow |\vec{v}| = \omega \cdot R$

Kreisbahn: $s = 2\pi R$

$$\left.\begin{matrix} h=0 \Rightarrow |\vec{v}| = \omega\cdot R \\ s = 2\pi R \end{matrix}\right\} T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi R}{\omega \cdot R} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{\omega}}}$$ ✓ 0,5P

✓ 1P

5P

10P

2.11.07 Theo Tut

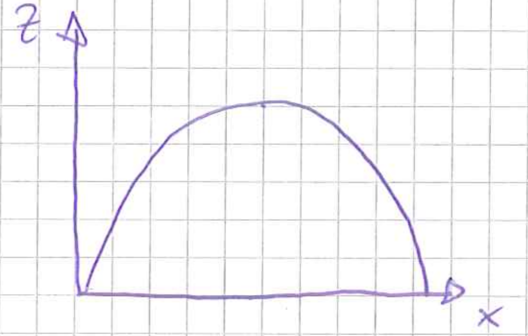
Blatt 02, Aufgabe 6.

a) (i) $x(t) = vt\cos\theta$ $\rightarrow t = \frac{x}{v\cos\theta}$

$y(t) = 0$

$z(t) = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$

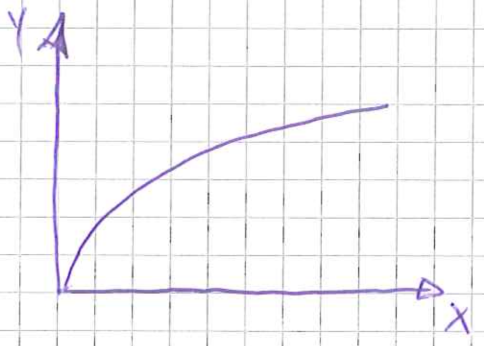
$\Rightarrow z(t) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x - \frac{g x^2}{2v^2\cos^2\theta} \overset{\text{allg.}}{=} ax + bx^2 \Rightarrow$ Parabel



(ii) $x(t) = vt$

$y(t) = y_0 \ln\left(\frac{vt}{y_0} + 1\right) = y_0 \ln\left(\frac{x}{y_0} + 1\right)$

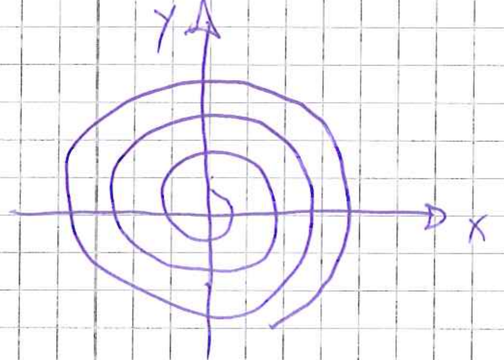
$z(t) = 0$



(iii) $x(t) = vt\sin(\omega t)$

$y(t) = vt\cos(\omega t)$

$z(t) = 0$



b) $\ell(t) = \int_0^{t_1} dt\, |\vec{v}(t)|$

(i) $\dot{x}(t) = v\cos\theta$

$\dot{z}(t) = v\sin\theta - gt$

$$\Rightarrow |\vec{v}(t)| = \sqrt{v^2\cos^2\theta + v^2\sin^2\theta + g^2t^2 - 2vgt\sin\theta}$$

$$= \sqrt{v^2 + g^2t^2 - 2vgt\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \ell(t) = \int_0^{t_1} dt\, \underbrace{\sqrt{v^2+g^2t^2-2vgt\sin\theta}}_{\text{allg: } c+ax^2+2bx}$$

$$\Rightarrow a = g^2 \;,\; b = -vg\sin\theta \;,\; c = v^2$$

$$\ell(t) = \left[\frac{g^2v^2 - v^2g^2\sin^2\theta}{2g^3}\,\mathrm{Arsinh}\,\frac{g^2t - vg\sin\theta}{\sqrt{g^2v^2 - v^2g^2\sin\theta}} + \frac{g^2t - vg\sin\theta}{2g^2}\sqrt{g^2t - 2vgt\sin\theta + v^2}\right]_0^{t_1}$$

$$\ell(t) = \frac{v^2\cos^2\theta}{2g}\,\mathrm{Arsinh}\,\frac{gt_1 - v\sin\theta}{v\cos\theta} + \frac{gt_1 - v\sin\theta}{2\cdot g}\sqrt{g^2t_1 - 2vgt_1\sin\theta + v^2} - \frac{v^2\sin\theta}{2g}$$

(ii) $\dot{x}(t) = v$

$\dot{y}(t) = \frac{vy_0}{vt+y_0}$

$$\Rightarrow |\vec{v}(t)| = \sqrt{v^2 + \left(\frac{vy_0}{vt+y_0}\right)^2} = v\sqrt{1+\left(\frac{y_0}{vt+y_0}\right)^2}$$

$$\ell(t) = v\int_0^{t_1} dt\,\sqrt{1+\left(\frac{y_0}{vt+y_0}\right)^2}$$

Subst: $u = \frac{y_0}{vt+y_0}$ Grenzen $t = t_1 \Rightarrow u_1 = \frac{y_0}{vt_1+y_0}$

$t = t_2 \Rightarrow u_2 = 1$

$$\Rightarrow t = \frac{y_0}{v}\left(\frac{1}{u} - 1\right)$$

$$dt = -\frac{y_0}{v}\cdot\frac{1}{u}\,du$$

$$\Rightarrow \ell(t) = v\,\frac{y_0}{v}\int_1^{u_1} du\,\underbrace{\left(-\frac{1}{u^2}\right)}_{f'}\underbrace{\sqrt{1+u^2}}_{g}$$

$$= y_0\left[\frac{1}{u}\sqrt{1+u^2}\,\Big|_1^{u_1} - \underbrace{\int_1^{u_1} du\,\frac{1}{u}\,\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}}_{\text{Subst} \,\ldots}\right]$$

$$= y_0\left[\frac{1}{u}\sqrt{1+u^2} - \operatorname{arsinh} u\right]_1^{u_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln(u+\sqrt{u+1})$$

(iii) $\dot{x}(t) = v\sin(\omega t) + v\omega t\cos(\omega t)$

$\dot{y}(t) = v\cos(\omega t) - v\omega t\sin(\omega t)$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v^2 + v^2\omega^2 t^2} = v\sqrt{1+(\omega t)^2}$$

$$\ell(t) = v\int_0^{t_1} dt\,\underbrace{\sqrt{1+(\omega t)^2}}_{\substack{\text{allg.}\\ \sqrt{c+ax^2}}} = v\left[\frac{1}{2\omega}\operatorname{arsinh}\omega t + \frac{t}{2}\sqrt{1+(\omega t)^2}\right]_0^{t_1}$$