Theoretische Physik A

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila
www-ttp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/Uebungen

WS 07/08 – Blatt 03
Abgabe: 06.11.2007
Besprechung: 09.11.2007

(*) Aufgabe 7 (10P): Vektoren
Gegeben seien drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ durch $\vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{b}$ gegeben ist.

(b) Beweisen Sie, dass $|\vec{a} \times \vec{b}|$ die Fläche des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms angibt.

(c) Zeigen Sie, dass der Absolutbetrag von $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ gleich dem Volumen des durch die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds ist.

(d) Beweisen Sie,

$$\text{(i)} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \qquad \text{(ii)} \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

(e) Wie groß ist das Volumen eines Parallelepipeds, dessen Kanten durch $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\vec{b} = (1, -2, 2)$ und $\vec{c} = (3, -1, -2)$ gegeben sind?

(*) Aufgabe 8 (10P): Bahnkurven
Ein Massenpunkt bewegt sich auf der Bahnkurve

$$\begin{aligned} x(t) &= Re^{a\omega t} \cos \omega t, \\ y(t) &= Re^{a\omega t} \sin \omega t \end{aligned}$$

mit konstanten Parametern R, a und ω.

(a) Skizzieren Sie die Bahnkurve.

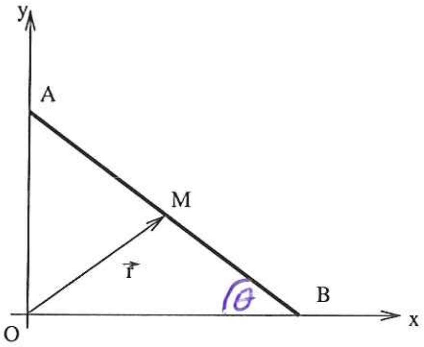
(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$ und deren Betrag $v(t) = |\vec{v}(t)|$.

(c) Bestimmen Sie die Beschleunigung $\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t))$ und deren Betrag $a(t) = |\vec{a}(t)|$. Ist $a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$?

(d) Berechnen Sie die Bogenlänge der angegebenen Bahnkurve $s(t)$ als Funktion der Zeit t, gemessen ab $t = 0$.

(e) Geben Sie nun eine Parameterdarstellung der Bahnkurve mit der Bogenlänge s als Parameter, also $\vec{r}(s) = (x(s), y(s))$.

Aufgabe 9: Leiter
Eine Leiter AB mit der Länge l ruht gegen eine senkrechte Wand OA (vgl. Abbildung). Das Ende B der Leiter wird mit konstanter Geschwindigkeit v_0 zur Seite gestoßen.



$|\vec{r}|$ (a) Zeigen Sie, dass dabei der Mittelpunkt M der Leiter eine Kreisbahn vom Radius $l/2$ mit dem Ursprung in O durchläuft.

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Leitermittelpunktes, solange zwischen Wand und B der Abstand $b < l$ ist.

(c) Berechnen Sie die Tangential- und Zentripetalbeschleunigung.

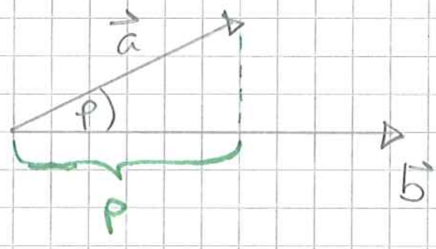
Theo A
WS 07/08 Blatt 03

Stefan Heitz
Matr.-Nr.: 1421950
Tutoriumgruppe 12
Tutor: Marius Kist

Aufgabe 7: Vektoren

geg: Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

a)



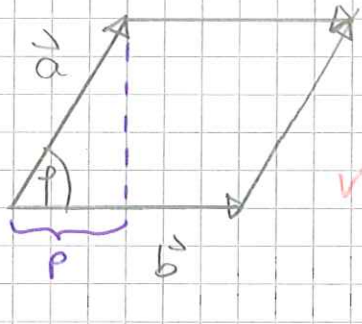
$$\text{I} \quad \cos\rho = \frac{p}{|\vec{a}|}$$

$$\text{II} \quad \cos\rho = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \Leftrightarrow p = \vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

✓ 1P

b)



Bekannt ist: $\boxed{a = |\vec{a}| \text{ und } b = |\vec{b}|}$

- $A = a\cdot b\cdot\sin\rho$
- $\sin\rho = \frac{\sqrt{a^2 - p^2}}{a}$
- $p = \vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{b}$

✓ 1,5P

$$A = a\cdot b\cdot\sin\rho = a\cdot b\cdot\frac{\sqrt{a^2-p^2}}{a}$$

$$= b\cdot\sqrt{a^2 - \left(\vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{b}\right)^2}$$

$$= \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\cdot\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2) - \frac{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2}{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}}$$

$$= \sqrt{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\cdot(a_1^2+a_2^2+a_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2}$$

$$= \sqrt{a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2}$$

$$= \sqrt{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}$$

$$= |\vec{a}\times\vec{b}|$$

✓ 1P

c)

✓ 0,5 P

$V = A_g \cdot h \quad \text{mit } A_g = |\vec{a}\times\vec{b}|$

$\Rightarrow V = |\vec{a}\times\vec{b}| \cdot h$

$h = |\vec{c}| \cdot \cos\varphi$

<u>Zu zeigen</u>: $V = |c \cdot (\vec{a}\times\vec{b})|$

<u>Beweis</u>: $V = |A_g \cdot h|$

$= \left| |\vec{a}\times\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\varphi \right|$

$\cos\varphi = \dfrac{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}{|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}$

$\Rightarrow V = \left| |\vec{a}\times\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \dfrac{(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}}{|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} \right| = \underline{\underline{|\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|}}$ ✓ 1P

d) (i) zu zeigen: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

$\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_2a_3 - c_3a_2 \\ c_3a_1 - c_1a_3 \\ c_1a_2 - c_2a_1 \end{pmatrix} = b_1c_2a_3 - b_1c_3a_2 + b_2c_3a_1 - b_2c_1a_3 + b_3c_1a_2 - b_3c_2a_1$$

✓ 1P

$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2 + c_2a_3b_1 - c_2a_1b_3 + c_3a_1b_2 - c_3a_2b_1$$

✓ 1P

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})$$

(ii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

✓ 1P

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\times\begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 \\ a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 \\ a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix}$$ ✓ 1P

$$= \begin{pmatrix} b_1a_1c_1 + b_1a_2c_2 + b_1a_3c_3 - c_1b_1a_1 - c_1b_2a_2 - c_1b_3a_3 \\ b_2a_1c_1 + b_2a_2c_2 + b_2a_3c_3 - c_2b_1a_1 - c_2b_2a_2 - c_2b_3a_3 \\ b_3a_1c_1 + b_3a_2c_2 + b_3a_3c_3 - c_3b_1a_1 - c_3b_2a_2 - c_3b_3a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{b}\cdot\begin{pmatrix} a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \end{pmatrix} - \vec{c}\begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{b}\cdot(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$$ ✓ 1P

e) geg: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$V = \left|\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\right|$$

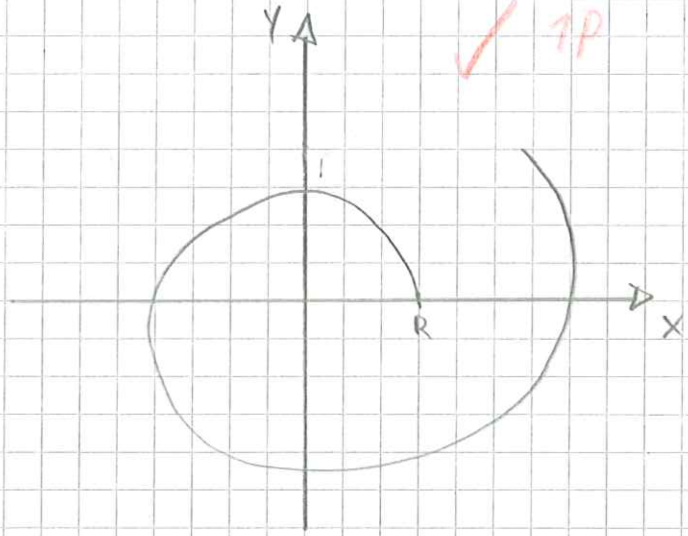
$$= \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}\right| = \underline{\underline{31}}$$ ✓ 1P

10

Aufgabe 8: Bahnkurven

$$x(t) = R e^{a\omega t} \cos(\omega t)$$
$$y(t) = R e^{a\omega t} \sin(\omega t)$$

a) Skizze:



✓ 1P

b) $\dot{x}(t) = e^{a\omega t} \cdot a\omega \cdot R \cdot \cos(\omega t) + e^{a\omega t} \cdot R \cdot (-\sin(\omega t)) \cdot \omega$
$= R \cdot \omega \cdot e^{a\omega t} \cdot (a\cos(\omega t) - \sin(\omega t))$

$\dot{y}(t) = e^{a\omega t} \cdot a\omega \cdot R \cdot \sin(\omega t) + e^{a\omega t} \cdot R \cdot \cos(\omega t) \cdot \omega$
$= R \cdot \omega \cdot e^{a\omega t} \cdot (a\sin(\omega t) + \cos(\omega t))$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} R\omega e^{a\omega t} (a\cos(\omega t) - \sin(\omega t)) \\ R\omega e^{a\omega t} (a\sin(\omega t) + \cos(\omega t)) \end{pmatrix}$$ ✓ 1P

$|\vec{v}| = \sqrt{R^2\omega^2 e^{2a\omega t} (a\cos(\omega t) - \sin(\omega t))^2 + R^2\omega^2 e^{2a\omega t} (a\sin(\omega t) + \cos(\omega t))^2}$
$= R\omega e^{a\omega t} \sqrt{a^2\cos^2(\omega t) + a^2\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}$
$= R \cdot \omega \cdot e^{a\omega t} \sqrt{1 + a^2}$ ✓ 1P

c) $\ddot{x}(t) = \left[Ra^2\omega^2 e^{a\omega t}\cos(\omega t) - Ra\omega^2 e^{a\omega t}\sin(\omega t)\right] - \left[R\omega^2 a e^{a\omega t}\sin(\omega t) + R\omega^2 e^{a\omega t}\cos(\omega t)\right]$

$$= Ra^2\omega^2 e^{a\omega t}\cos(\omega t) - Ra\omega^2 e^{a\omega t}\sin(\omega t) - R\omega^2 a e^{a\omega t}\sin(\omega t) - R\omega^2 e^{a\omega t}\cos(\omega t)$$

$$= R\omega^2 e^{a\omega t}\left(a^2\cos(\omega t) - a\sin(\omega t) - a\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\right)$$

$$= R\omega^2 e^{a\omega t}\left(a^2\cos(\omega t) - 2a\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\right)$$

$$\ddot{y}(t) = \left[R\omega^2 a^2 e^{a\omega t}\sin(\omega t) + R\omega^2 a e^{a\omega t}\cos(\omega t)\right] + \left[R\omega^2 e^{a\omega t} a\cos(\omega t) + R\omega^2 e^{a\omega t}(-\sin(\omega t))\right]$$

$$= R\omega^2 a^2 e^{a\omega t}\sin(\omega t) + R\omega^2 a e^{a\omega t}\cos(\omega t) + R\omega^2 a e^{a\omega t}\cos(\omega t) - R\omega^2 e^{a\omega t}\sin(\omega t)$$

$$= R\omega^2 e^{a\omega t}\left(a^2\sin(\omega t) + a\cos(\omega t) + a\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\right)$$

$$= R\omega^2 e^{a\omega t}\left(a^2\sin(\omega t) + 2a\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\right)$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} R\omega^2 e^{a\omega t}\left(a^2\cos(\omega t) - 2a\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\right) \\ R\omega^2 e^{a\omega t}\left(a^2\sin(\omega t) + 2a\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\right) \end{pmatrix}$$ ✓ 1,5 P

$$|\vec{a}| = R\omega^2 e^{a\omega t}\cdot\sqrt{\left(a^2\cos(\omega t) - 2a\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\right)^2 + \left(a^2\sin(\omega t) + 2a\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\right)^2}$$

$$= R\omega^2 e^{a\omega t}\sqrt{4a^2\left(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right) + (a^2-1)^2\left(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right)}$$

$$= R\omega^2 e^{a\omega t}\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1}$$

$$= R\omega^2 e^{a\omega t}(a^2+1)$$ ✓ 1P

Ist $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$?

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} R\omega e^{a\omega t}\sqrt{1+a^2} = Ra\omega^2 e^{a\omega t}\sqrt{1+a^2} \neq |\vec{a}|$$ ✓ 0,5 P

d) Bogenlänge $s(t_1)$:

$$s(t_1) = \int_0^{t_1} dt\, |\vec{v}(t)| dt = \int_0^{t_1} dt \left(R\omega e^{a\omega t}\sqrt{a^2+1}\right)$$

$$= \left[R\omega\sqrt{a^2+1}\cdot\frac{1}{a\omega}e^{a\omega t}\right]_0^{t_1} = \left[\frac{R}{a}\sqrt{a^2+1}\, e^{a\omega t}\right]_0^{t_1}$$

$$= \frac{R}{a}\sqrt{a^2+1}\, e^{a\omega t_1} - \frac{R}{a}\sqrt{a^2+1}$$ ✓ 1,5 P

$$\Rightarrow s(t_1) = \frac{R}{a}\sqrt{a^2+1}\,(e^{a\omega t_1}-1)$$

e) $s(t) = \frac{R}{a}\sqrt{1+a^2}\,(e^{a\omega t}-1)$

$$\Leftrightarrow e^{a\omega t} - 1 = \frac{as}{R\sqrt{1+a^2}}$$

$$\Leftrightarrow e^{a\omega t} = \frac{s+\frac{1}{a}R\sqrt{a^2+1}}{\frac{1}{a}R\sqrt{a^2+1}} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln e^{a\omega t} = \ln\left(\frac{s+\frac{1}{a}R\sqrt{a^2+1}}{\frac{1}{a}R\sqrt{a^2+1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{sa+R\sqrt{a^2+1}}{R\sqrt{a^2+1}}\right)}{a\omega}$$ ✓ 0,5P

$$\Rightarrow x(t(s)) = R\cdot e^{\cancel{a\omega}\cdot\frac{\ln\left(\frac{sa+R\sqrt{a^2+1}}{R\sqrt{a^2+1}}\right)}{\cancel{a\omega}}}\cos\left(\cancel{\omega}\cdot\frac{\ln\left(\frac{sa+R\sqrt{a^2+1}}{R\sqrt{a^2+1}}\right)}{a\cancel{\omega}}\right)$$

$$= R\cdot\frac{sa+\sqrt{a^2+1}\,R}{R\sqrt{a^2+1}}\cos\left(\frac{1}{a}\ln\frac{sa+R\sqrt{a^2+1}}{R\sqrt{a^2+1}}\right)$$

$$y(t(s)) = R\cdot e^{\cancel{a\omega}\cdot\frac{\ln\left(\frac{sa+R\sqrt{a^2+1}}{R\sqrt{a^2+1}}\right)}{\cancel{a\omega}}}\sin\left(\cancel{\omega}\cdot\frac{\ln\left(\frac{sa+R\cdot\sqrt{a^2+1}}{R\sqrt{a^2+1}}\right)}{a\cancel{\omega}}\right)$$

$$= \frac{sa+R\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}\sin\left(\frac{1}{a}\ln\frac{sa+R\sqrt{a^2+1}}{R\sqrt{a^2+1}}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{r}(s) = \begin{pmatrix} \frac{sa+R\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}\cos\left(\frac{1}{a}\ln\frac{sa+R\sqrt{a^2+1}}{R\sqrt{a^2+1}}\right) \\ \frac{sa+R\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}\sin\left(\frac{1}{a}\ln\frac{sa+R\sqrt{a^2+1}}{R\sqrt{a^2+1}}\right)\end{pmatrix}$$ ✓ 1P ✓ 1P

10

20

9.11.07 Theo Tut

Blatt 03

Aufgabe 9: Leiter

a) $\vec{OB} = \ell \cos\theta\, \hat{e}_x$ $\qquad \hat{e}_x$ = Einheitsvektor

$\vec{OA} = \ell \sin\theta\, \hat{e}_y$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \ell(\cos\theta\,\hat{e}_x - \sin\theta\,\hat{e}_y)$$

$$\vec{r} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$= \ell\sin\theta\,\hat{e}_y + \frac{\ell}{2}(\cos\theta\,\hat{e}_x - \sin\theta\,\hat{e}_y)$$

$$= \frac{\ell}{2}(\cos\theta\,\hat{e}_x + \sin\theta\,\hat{e}_y) = \frac{\ell}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

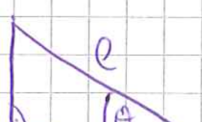
$$|\vec{r}| = \frac{\ell}{2}\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \underline{\underline{\frac{\ell}{2}}}$$

b) $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\ell}{2}\begin{pmatrix}-\dot\theta\sin\theta\\ \dot\theta\cos\theta\end{pmatrix} = \frac{\ell}{2}\dot\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$

$\dot\theta = \frac{d\theta}{dt}$; $\frac{d}{dt}\vec{OB} = v_0\,\hat{e}_x$; $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\ell\cos\theta\\ 0\end{pmatrix} = -\ell\dot\theta\cos\theta\,\hat{e}_x = v_0\,\hat{e}_x$

$$\Rightarrow \dot\theta = -\frac{v_0}{\ell\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{\ell}{2}\cdot\left(-\frac{v_0}{\ell\sin\theta}\right)\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = \frac{v_0}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\end{pmatrix}$$



$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{b}{\sqrt{\ell^2 - b^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{v_0}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{b}{\sqrt{\ell^2-b^2}}\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\ell}{2}\ddot{\theta}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}^2\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$a_x = \frac{\ell}{2}\left(-\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow \overset{\neq 0}{\ddot{\theta}} = -\dot{\theta}^2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$a_y = \frac{\ell}{2}\left(-\dot{\theta}^2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)$$

$$= -\frac{\ell}{2}\dot{\theta}^2\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\right) = -\frac{\ell}{2}\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = -\frac{\ell}{2}\dot{\theta}^2\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sin\theta}\end{pmatrix}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\ell^2-b^2}}{\ell}\ ; \quad \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{\ell^2-b^2}$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{\sin\theta} = \frac{v_0^2}{\ell^2-b^2}\cdot\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2-b^2}} = \frac{v_0^2\,\ell}{(\ell^2-b^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = -\frac{v_0^2}{2}\frac{\ell^2}{(\ell^2-b^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

c) $a_t = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$$v = \frac{1}{2}v_0\sqrt{1+\frac{b^2}{\ell^2-b^2}} = \frac{1}{2}v_0\sqrt{\frac{\ell^2}{\ell^2-b^2}} = \frac{1}{2}v_0\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2-b^2}}$$

$\vec{a}\cdot\vec{v} = a_y \cdot v_y$, da $a_x = 0$

$$\frac{v_y}{v} = \frac{\frac{1}{2}v_0\left(-\frac{b}{\sqrt{\ell^2-b^2}}\right)}{\frac{1}{2}v_0\left(\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2-b^2}}\right)} = -\frac{b}{\ell}$$

$$\Rightarrow a_t = a_y\left(-\frac{b}{\ell}\right) = \frac{v_0^2\,\ell b}{2(\ell^2-b^2)^{3/2}}$$

$$\vec{a}_{zp} = \vec{a} - \vec{a}_t \rightarrow a_{zp} = \sqrt{a^2-a_t^2} = \left(\left(\frac{v_0^2\ell^2}{2(\ell^2-b^2)^{3/2}}\right)^2 - \left(\frac{v_0^2\ell b}{2(\ell^2-b^2)^{3/2}}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$a_{zp} = \frac{v_0^2\,\ell}{2(\ell^2-b^2)^{3/2}}\sqrt{\ell^2-b^2} = \frac{v_0^2\,\ell}{2(\ell^2-b^2)}$$