Theoretische Physik A

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila
www-ttp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/Uebungen

WS 07/08 – Blatt 04
Abgabe: 13.11.2007
Besprechung: 16.11.2007

(*) Aufgabe 10 (7P): Fortsetzung von Aufgabe 8, Blatt 3

(f) Berechnen Sie den Tangentenvektor zur Bahnkurve $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ und überzeugen Sie sich durch explizite Rechnung, dass $\vec{\tau}^{\,2}=1$.

(g) Bestimmen Sie die Krümmung der Bahnkurve.

(h) Berechnen Sie die Tangential- und Zentripetalbeschleunigung und deren Betrag.

(i) Berechnen Sie den Abstand zwischen $\vec{r}(0)$ und $\vec{r}(t)$.

(*) Aufgabe 11 (13P): Schiefer Wurf

Ein Massenpunkt wird unter dem Winkel θ zur Horizontalen hochgeworfen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Massenpunkt am Ort $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ und der Betrag der Geschwindigkeit sei $|\vec{v}(0)| = v_0$. Infolge des Luftwiderstandes ist die Beschleunigung durch $\vec{a} = -k\vec{v} - g\vec{e_z}$ gegeben.
Durch Integration der Gleichung

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}(t)$$

erhalten Sie zunächst $\vec{v}(t)$ und dann $\vec{r}(t)$. Die jeweiligen Integrationskonstanten sind durch die Vorgabe von $\vec{v}(0) = v_0(\cos\theta, 0, \sin\theta)^{\mathrm{T}}$ und $\vec{r}(0)$ festgelegt.

(a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Massenpunktes als Funktion der Zeit.
Hinweis: Führen Sie in der Gleichung $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ die Substitution $\vec{v}(t) = \vec{\phi}(t)\mathrm{e}^{-kt}$ ein und bestimmen Sie zunächst die Funktion $\vec{\phi}(t)$.

(b) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ des Massenpunktes und skizzieren Sie diese.

(c) Zeigen Sie, dass der Massenpunkt im Limes $t \to \infty$ eine endliche Grenzgeschwindigkeit erreicht und berechnen Sie deren Betrag.

Zeigen Sie, dass gilt:

(d) Der höchste Bahnpunkt wird nach der Zeit

$$T = \frac{1}{k}\ln\left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}\right) \quad \text{erreicht.}$$

(e) Die Höhe am Scheitelpunkt der Bahn ist

$$H = \frac{v_0 \sin\theta}{k} - \frac{g}{k^2}\ln\left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}\right).$$

(f) Für kleinen Luftwiderstand ($k \to 0$) ist die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ annähernd gegeben durch

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - g\,t\,\vec{e}_z\,, \quad \vec{r}(t) = t\,\vec{v}_0 - \frac{gt^2}{2}\vec{e}_z\,.$$

Hinweis: Für ($k \to 0$) können Sie e^{-kt} durch

$$1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2 \quad \text{ersetzen.}$$

Aufgabe 12: Achterbahn

Für den Bau einer Achterbahn steht ein Grundstück von netto $x_{\text{tot}} = 20m$ Breite und $y_{\text{tot}} = 40m$ Länge zur Verfügung. Die Vorschriften erlauben eine Montage der Schienen in bis zu $z_{\text{max}} = 10m$ Höhe.

Zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = T$ befinde sich der Wagen in der Mitte des Grundstücks im Ursprung des Koordinatensystems und bewege sich mit der Geschwindigkeit v_0 in x-Richtung. Der Betrag des Beschleunigung a_0 sei konstant. Während des ersten und letzten Viertels der Periodendauer T betrage die vertikale Komponente der Beschleunigung a_v nach oben, dazwischen erfolge eine ebensolche Beschleunigung nach unten. Die Richtung des horizontalen Anteils $\frac{\vec{a}_h}{|\vec{a}_h|}$ der Beschleunigung bilde mit der y-Achse in der ersten Hälfte der Periodendauer einen Winkel $\phi(t) = 4\pi t/T$. In der 2. Hälfte habe die y-Komponente der Beschleunigung das umgekehrte Vorzeichen.

(a) Geben Sie den Vektor der Beschleunigung als Funktion der Zeit an. Verwenden Sie a_v, a_h und $\omega = 4\pi/T$ als Parameter.

(b) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor als Funktion der Zeit. Verwenden Sie v_0, a_v, a_h und ω als Parameter.

(c) Geben Sie die Bahnkurve als Funktion der Zeit an. Verwenden Sie zunächst v_0, a_v, a_h und ω als Parameter.

(d) Nutzen Sie die Randbedingungen, das Grundstück und die Vorschriften voll aus, um die Größen a_v, a_h und v_0 durch z_{max}, x_{tot} und T bzw. ω auszudrücken.

(e) Skizzieren Sie die Achterbahn in der Draufsicht (Blickrichtung entgegen der z-Achse) und in der Seitenansicht (Blickrichtung entlang der x-Achse).

Theo A

WS07/08 Blatt 04

Stefan Heitz
Matr.-Nr.: 1421950
Tutoriumgruppe 12
Tutor: Marius Kist

Aufgabe 10: Fortsetzung von A8, Blatt 3

f) $\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} R\omega e^{a\omega t}(a\cos(\omega t) - \sin(\omega t)) \\ R\omega e^{a\omega t}(a\sin(\omega t) + \cos(\omega t)) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{R\omega e^{a\omega t}\sqrt{a^2+1}}$$

$$\Rightarrow \vec{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(a\cos(\omega t) - \sin(\omega t)) \\ \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(a\sin(\omega t) + \cos(\omega t)) \end{pmatrix}$$ ✓ 2P

$\vec{T}^2 = 1$?

$$\vec{T}^2 = \frac{1}{a^2+1}\left(\underbrace{a^2\cos^2(\omega t) - \cancel{2a\cos(\omega t)\sin(\omega t)} + \sin^2(\omega t) + a^2\sin^2(\omega t)}_{a^2} + \cancel{2a\cos(\omega t)\sin(\omega t)} + \cos^2(\omega t)\right)$$

(the terms $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)$ marked $= 1$)

$$= \frac{1}{a^2+1}\cdot(a^2+1) = 1$$ ✓ 1P

g) Krümmung der Bahnkurve

$$\kappa = \left|\frac{d\vec{T}(s)}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{T}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{T}}{dt}\cdot\frac{1}{|\vec{v}|}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\begin{pmatrix} -a\omega\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t) \\ a\omega\cos(\omega t) - \omega\sin(\omega t) \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{R\omega e^{a\omega t}\sqrt{a^2+1}}\right|$$

$$= \left|\frac{\omega}{R\omega e^{a\omega t}(a^2+1)}\begin{pmatrix} -a\sin(\omega t) - \cos(\omega t) \\ a\cos(\omega t) - \sin(\omega t) \end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{Re^{a\omega t}(a^2+1)}\sqrt{\left((-1)\cdot(a\sin(\omega t) + \cos(\omega t))\right)^2 + (a\cos(\omega t) - \sin(\omega t))^2}$$

$$= \frac{1}{R e^{a\omega t}(a^2+1)} \cdot \sqrt{(a^2+1)\left(\cos^2(\omega t)+\sin^2(\omega t)\right)}$$

$$= \frac{1}{R \cdot e^{a\omega t}\sqrt{a^2+1}}$$

$$s(t) = \frac{R}{a}\sqrt{1+a^2}\, e^{a\omega t} - \frac{R}{a}\sqrt{1+a^2}$$

$$\Rightarrow e^{a\omega t} = \frac{sa + R\sqrt{a^2+1}}{R\sqrt{a^2+1}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{K} = \frac{1}{as + R\sqrt{a^2+1}}$$ ✓ 1P

b) Tangential- und Zentripetalbeschleunigung

$$\vec{a}_{\parallel} = \vec{T} \cdot a = \vec{T} \cdot \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{a^2+1}}} \cdot \begin{pmatrix} a\cos(\omega t) - \sin(\omega t) \\ a\sin(\omega t) + \cos(\omega t) \end{pmatrix} \cdot R\omega^2 a\, e^{a\omega t} \cancel{\sqrt{a^2+1}}$$

$$= Ra\omega^2 e^{a\omega t} \begin{pmatrix} a\cos(\omega t) - \sin(\omega t) \\ a\sin(\omega t) + \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}_{\parallel}| = Ra\omega^2 e^{a\omega t} \cdot \sqrt{(a\cos(\omega t) - \sin(\omega t))^2 + (a\sin(\omega t) + \cos(\omega t))^2}$$

$$= Ra\omega^2 e^{a\omega t}\sqrt{a^2+1}$$ ✓ 1P

$$\vec{a}_{\perp} = v^2 \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = v^2 \cdot \frac{d\vec{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = v \cdot \frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$= R\omega e^{a\omega t}\cancel{\sqrt{a^2+1}} \cdot \frac{\omega}{\cancel{\sqrt{a^2+1}}} \cdot \begin{pmatrix} -a\sin(\omega t) - \cos(\omega t) \\ a\cos(\omega t) - \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$= R\omega^2 e^{a\omega t} \begin{pmatrix} -a\sin(\omega t) - \cos(\omega t) \\ a\cos(\omega t) - \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}_\perp| = R\omega^2 e^{a\omega t}\sqrt{\left((-1)\left(a\sin(\omega t)+\cos(\omega t)\right)\right)^2+\left(a\cos(\omega t)-\sin(\omega t)\right)^2}$$

$$= R\omega^2 e^{a\omega t}\underline{\underline{\sqrt{a^2+1}}}$$ ✓ 1P

i) Abstand zwischen $\vec{r}(0)$ und $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} Re^{a\omega t}\cos(\omega t) \\ Re^{a\omega t}\sin(\omega t)\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = |\vec{r}(t)-\vec{r}(0)| = \left|\begin{pmatrix} Re^{a\omega t}\cos(\omega t) - R \\ Re^{a\omega t}\sin(\omega t)\end{pmatrix}\right|$$

$$d = \sqrt{R^2e^{2a\omega t}\cos^2(\omega t) - 2R^2e^{a\omega t}\cos(\omega t) + R^2 + R^2e^{2a\omega t}\sin^2(\omega t)}$$

$$\Rightarrow d = R\sqrt{e^{2a\omega t} - 2e^{a\omega t}\cos(\omega t)+1}$$ ✓ 1P

$\underline{\underline{7}}$

Aufgabe 11: Schiefer Wurf

a) $\vec{a} = -k\vec{v} - g\vec{e}_z$

$\vec{v}(t) = \vec{\phi}(t) \cdot e^{-kt}$

$\Rightarrow \dot{\vec{v}} = \vec{a} = \dot{\vec{\phi}}(t) \cdot e^{-kt} + \phi(t) \cdot e^{-kt} \cdot (-k)$

$\Rightarrow \dot{\phi}(t) \cdot e^{-kt} - \phi(t) \cdot e^{-kt} \cdot k = -k \cdot \phi(t) \cdot e^{-kt} - g \cdot \vec{e}_z$

$\Leftrightarrow \dot{\phi}(t) \cdot e^{-kt} = -g \cdot \vec{e}_z \quad | : e^{-kt}$

$\dot{\phi}(t) = -\frac{g \cdot \vec{e}_z}{e^{-kt}}$ ✓ 1P

$\Rightarrow \phi(t) = \int dt \left(-\frac{g \cdot \vec{e}_z}{e^{-kt}}\right) = -\frac{g}{k} \cdot \vec{e}_z \cdot e^{kt} + c$ ✓ 0,5P

$\Rightarrow \vec{v} = \left(-\frac{g}{k} \cdot \vec{e}_z \cdot e^{kt} + c\right) \cdot e^{-kt} = -\frac{g}{k} \cdot \vec{e}_z \cdot e^{kt} \cdot e^{-kt} + c \cdot e^{-kt}$

$\Rightarrow \vec{v}(t) = c \cdot e^{-kt} - \frac{g}{k} \cdot \vec{e}_z$ ✓ 0,5P

$\vec{v}(0) = v_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

$\vec{v}(t) = c \cdot e^{-kt} - \frac{g}{k} \cdot \vec{e}_z$

$\Rightarrow c \cdot e^0 - \frac{g}{k} \cdot \vec{e}_z = v_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix} \Rightarrow c = v_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \frac{g}{k} \cdot \vec{e}_z$ ✓ 1,5P

$\Rightarrow \vec{v}(t) = \left(v_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \frac{g}{k} \cdot \vec{e}_z\right) \cdot e^{-kt} - \frac{g}{k} \cdot \vec{e}_z$

b) ges: $\vec{r}(t)$ und Skizze

$\vec{r}(t) = \int dt\, \vec{v}(t)$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = -\frac{1}{k}\left(v_0\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta\\0\\\sin\theta\end{pmatrix} + \frac{g}{k}\vec{e}_z\right)\cdot e^{-kt} - \frac{g}{k}\cdot\vec{e}_z\cdot t + c$$ ✓ 1P

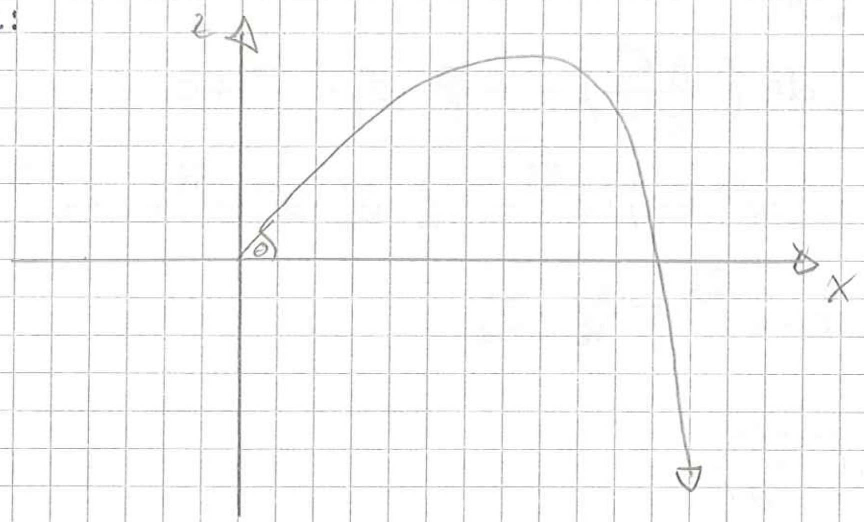
$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow c = \frac{1}{k}\left(v_0\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta\\0\\\sin\theta\end{pmatrix} + \frac{g}{k}\vec{e}_z\right)$$ 1,5 P

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = -\frac{1}{k}\left(v_0\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta\\0\\\sin\theta\end{pmatrix} + \frac{g}{k}\vec{e}_z\right)\cdot e^{-kt} - \frac{gt}{k}\cdot\vec{e}_z + \frac{1}{k}\left(v_0\begin{pmatrix}\cos\theta\\0\\\sin\theta\end{pmatrix} + \frac{g}{k}\vec{e}_z\right)$$

$$= -\frac{1}{k}e^{-kt}\begin{pmatrix}v_0\cos\theta\\0\\\frac{g}{k}+v_0\sin\theta\end{pmatrix} - \frac{gt}{k}\vec{e}_z + \frac{1}{k}\begin{pmatrix}v_0\cos\theta\\0\\\frac{g}{k}+v_0\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{gt}{k}\vec{e}_z + \frac{1}{k}\begin{pmatrix}v_0\sin\theta\\0\\\frac{g}{k}+v_0\sin\theta\end{pmatrix}(1-e^{-kt})$$

Skizze:



✓ 1P

c) $\vec{v}(t) = \left(v_0\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta\\0\\\sin\theta\end{pmatrix} + \frac{g}{k}\vec{e}_z\right)\cdot e^{-kt} - \frac{g}{k}\cdot\vec{e}_z$

$\lim_{t\to\infty}\vec{v}(t) = -\frac{g}{k}\cdot\vec{e}_z$

Betrag von $\lim_{t\to\infty}\vec{v}(t) = \sqrt{\left(-\frac{g}{k}\right)^2} = \frac{g}{k}$ ✓ 1P

d) ges: Zeit, wann höchster Bahnpunkt erreicht wird

$\vec{v}_z(t) = 0$! ✓ 0,5 P

$\Rightarrow (v_0 \cdot \sin\theta + \frac{g}{k}) e^{-kt} = \frac{g}{k} \quad | \cdot e^{kt}$

$\Leftrightarrow \frac{g}{k} e^{kt} = v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}$

$\Leftrightarrow e^{kt} = \frac{k}{g}(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}) = \frac{k v_0}{g} \sin\theta + 1 \quad | \ln$

$\Leftrightarrow kt = \ln(\frac{k v_0}{g} \sin\theta + 1) \quad | : k$

$\Rightarrow t = \frac{1}{k} \ln(\frac{k v_0}{g} \sin\theta + 1) = T$ ✓ 1,5 P q.e.d.

e) ges: Höhe am Scheitelpunkt

$\vec{r}(t) = -\frac{g}{k} \vec{e}_z t + \frac{1}{k} \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ 0 \\ \frac{g}{k} + \sin\theta \end{pmatrix} (1 - e^{-kt})$

$\vec{r}_z(t) = -\frac{g}{k} t + (\frac{g}{k^2} + \frac{v_0 \sin\theta}{k})(1 - e^{-kt})$

t einsetzen:

$\Rightarrow -\frac{g}{k} \cdot \frac{1}{k} \ln(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}) + (\frac{g}{k^2} + \frac{v_0 \sin\theta}{k})(1 - e^{-k \frac{1}{k} \ln(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g})})$

$= -\frac{g}{k^2} \ln(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}) + (\frac{g}{k^2} + \frac{v_0 \sin\theta}{k})(1 - \frac{1}{1 + \frac{k}{g} v_0 \sin\theta})$

$= -\frac{g}{k^2} \ln(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}) + \frac{g + v_0 k \sin\theta}{k^2} \frac{g + v_0 k \sin\theta - g}{g + v_0 k \sin\theta}$

$= \frac{v_0 \sin\theta}{k} - \frac{g}{k^2} \ln(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}) = H$ ✓ 1 P q.e.d.

8) $\vec{v}(t) = \left(\vec{v}_0 + \frac{g}{k}\vec{e}_z\right) e^{-kt} - \frac{g}{k}\vec{e}_z$

$k \to 0 \Rightarrow e^{-kt} = 1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2$

$\Rightarrow \vec{v}(t) = \left(\vec{v}_0 + \frac{g}{k}\vec{e}_z\right)\left(1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2\right) - \frac{g}{k}\vec{e}_z$

$= \vec{v}_0 \underbrace{- \vec{v}_0 kt + \vec{v}_0 \frac{k^2}{2}t^2}_{\to 0} + \cancel{\frac{g}{k}\vec{e}_z} - gt\vec{e}_z + \underbrace{\frac{1}{2}gkt^2\vec{e}_z}_{\to 0} - \cancel{\frac{g}{k}\vec{e}_z}$

$= \vec{v}_0 - gt\vec{e}_z$ ✓ 1P

$\vec{r}(t) = -\frac{1}{k}\left(\vec{v}_0 + \frac{g}{k}\vec{e}_z\right)\cdot e^{-kt} - \frac{g}{k}\vec{e}_z \cdot t + \frac{1}{k}\left(\vec{v}_0 + \frac{g}{k}\vec{e}_z\right)$

$= -\frac{1}{k}\left(\vec{v}_0 + \frac{g}{k}\vec{e}_z\right)\cdot\left(1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2\right) - \frac{g}{k}\vec{e}_z \cdot t + \frac{1}{k}\left(\vec{v}_0 + \frac{g}{k}\vec{e}_z\right)$

$= -\frac{1}{k}\left(\vec{v}_0 - \vec{v}_0 kt + \vec{v}_0\frac{1}{2}k^2t^2 + \frac{g}{k}\vec{e}_z - gt\vec{e}_z + g\,k\cdot\frac{t^2}{2}\vec{e}_z\right) - \frac{g}{k}\vec{e}_z t + \frac{\vec{v}_0}{k} + \frac{g}{k^2}\vec{e}_z$

$= -\cancel{\frac{\vec{v}_0}{k}} + \vec{v}_0 t \underbrace{- \vec{v}_0 \cdot \frac{1}{2}kt^2}_{\to 0} - \cancel{\frac{g}{k^2}\vec{e}_z} + \cancel{\frac{g}{k}t\vec{e}_z} - g\frac{t^2}{2}\vec{e}_z - \cancel{\frac{g}{k}\vec{e}_z t} + \cancel{\frac{\vec{v}_0}{k}} + \cancel{\frac{g}{k^2}\vec{e}_z}$

$\Rightarrow \vec{r}(t) = t\cdot\vec{v}_0 - \frac{gt^2}{2}\vec{e}_z$ ✓ 1P

12

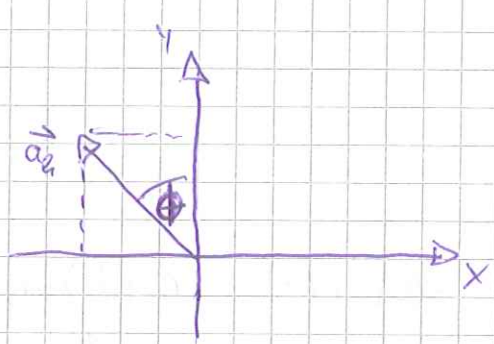
/20

16.11.07 Theo Tut) 4. Blatt

Aufgabe 12

a) $$a_z = \begin{cases} a_v, & t \in [0, \frac{T}{4}] \vee t \in [\frac{3T}{4}, T] \\ -a_v, & t \in [\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}] \end{cases}$$

$\vec{a}_h$:



$$\rightarrow a_x = -a_h \sin\phi = -a_h \sin(\omega t)$$

$$a_y = \begin{cases} a_h \cos(\omega t), & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ -a_h \cos(\omega t), & t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}$$

b) $v_x = \frac{a_h}{\omega} \cos(\omega t) + C_{v_x}$, $v(0) = v_0 = \frac{a_h}{\omega} + C_{v_x} \Rightarrow C_{v_x} = v_0 - \frac{a_h}{\omega}$

$$\Rightarrow v_x = v_0 + \frac{a_h}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)$$

$$v_y = \begin{cases} \frac{a_h}{\omega} \sin(\omega t) + C_{1v_y}, & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ -\frac{a_h}{\omega} \sin(\omega t) + C_{2v_y}, & t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}$$

$v_y(0) = 0$

$\Rightarrow C_{1v_y} = C_{2v_y} = 0$

$$v_z = \begin{cases} a_v t + C_{1v_z} & t \in [0, \frac{T}{4}] \\ -a_v t + C_{2v_z} & t \in [\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}] \\ a_v t + C_{3v_z} & t \in [\frac{3T}{4}, T] \end{cases}$$

$$v_z(0) = v_z(\tfrac{T}{2}) = v_z(T) = 0$$

$$\Rightarrow C_{1v_z} = 0, \quad C_{2v_z} = a_v \frac{T}{2}, \quad C_{3v_z} = -a_v T$$

c) $r_x = v_0 t + \frac{a_h}{\omega}\left(\frac{1}{\omega}\sin(\omega t) - t\right) + C_x \quad , V_x(0) = 0 \Rightarrow C_x = 0$

$$r_y = \begin{cases} -\frac{a_h}{\omega^2}\cos(\omega t) + C_{1y} \\ \frac{a_h}{\omega^2}\cos(\omega t) + C_{2y} \end{cases} \qquad r_y(0) = r_y(T) = 0$$

$$\Rightarrow C_{1y} = \frac{a_h}{\omega^2} \ , \ C_{2y} = -\frac{a_h}{\omega^2}$$

$$r_y = \begin{cases} -\frac{a_h}{\omega^2}\cos((\omega t) - 1) \\ \frac{a_h}{\omega^2}\cos((\omega t) - 1) \end{cases}$$

$$r_z = \begin{cases} \frac{1}{2} a_v t^2 + C_{1z} \\ -\frac{1}{2} a_v t^2 + C_{2z} - \frac{1}{2} a_v T t \\ \frac{1}{2} a_v t^2 + C_{3z} - a_v T t \end{cases} \qquad z(0) = z(T) = 0 \ , \ r_{1z}\left(\tfrac{T}{4}\right) = r_{2z}\left(\tfrac{T}{4}\right)$$

$$\Rightarrow C_{1z} = 0 \ , \ C_{3z} = \frac{1}{2} a_v T^2$$

$$C_{2z} = \frac{1}{2} a_v \frac{T^2}{8}$$

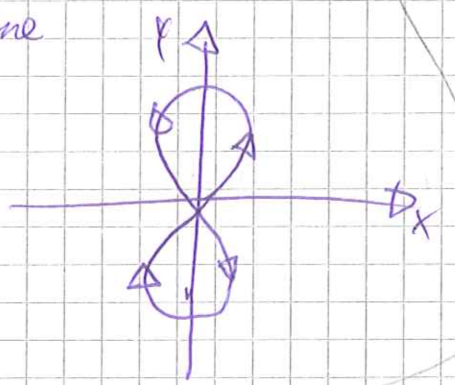
$$\Rightarrow r_z = \begin{cases} \frac{1}{2} a_v t^2 & , t \in [0, T/4] \\ \frac{1}{2} a_v \left(\frac{T^2}{8} - (t - \frac{1}{2}T)^2\right) & , t \in [T/4, 3T/4] \\ \frac{1}{2} a_v (t - T)^2 & , t \in [3T/4, T] \end{cases}$$

d) $z\left(\frac{T}{2}\right) = z_{max} = \frac{1}{16} a_v T^2 \Rightarrow a_v = \frac{16 z_{max}}{T^2}$

$x(T) = 0 = v_0 T - \frac{a_h}{\omega} T \Rightarrow a_h = \omega v_0 \Rightarrow a_h = \omega v_0 = \frac{1}{2}\omega^2 x_{tot}$

$x\left(\frac{T}{8}\right) = \frac{x_{tot}}{2} = \frac{v_0}{\omega} \Rightarrow v_0 = \frac{1}{2}\omega x_{tot}$

e) (x,y)-Ebene



(y,z)-Ebene