Theoretische Physik A

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila
www-ttp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/Uebungen

WS 07/08 – Blatt 06
Abgabe: 27.11.2007
Besprechung: 30.11.2007

(*) Aufgabe 17 (10P) : Kugelkoordinaten

Die kartesischen Koordinaten eines Ortsvektors $\vec{r}$ lassen sich durch Kugelkoordinaten ausdrücken, welche für $r \in [0,\infty)$, $\theta \in [0,\pi]$ und $\phi \in [0,2\pi]$ wie folgt definiert sind:

$$K : \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \vec{r}(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} x(r,\theta,\phi) \\ y(r,\theta,\phi) \\ z(r,\theta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial r}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial r}\right|}, \vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \theta}\right|}, \vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \phi}\right|}$$

und bestimmen Sie ihre Skalar- und Kreuzprodukte.

Hinweis: Das Symbol „∂“ bezeichnet eine partielle Ableitung. Die Regeln sind analog zur „gewöhnlichen“ Ableitung, wobei die restlichen Variablen als konstant angenommen werden.

(b) Berechnen Sie die ersten zeitlichen Ableitungen der oben definierten Einheitsvektoren. Drücken Sie das Ergebnis durch die Vektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ aus.

(c) $\vec{r}(t)$ beschreibe die Bahn eines Massenpunktes in Abhängigkeit von der Zeit t. Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Massenpunktes in Kugelkoordinaten. Drücken Sie das Ergebnis durch die Vektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ aus.

(d) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten.

(*) Aufgabe 18 (3P) : Zylinderkoordinaten

Die kartesischen Koordinaten eines Ortsvektors $\vec{r}$ lassen sich durch Zylinderkoordinaten ausdrücken, welche für $r \in [0,\infty)$, $\phi \in [0,2\pi]$ und $z \in (-\infty,\infty)$ wie folgt definiert sind:

$$Z : \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \vec{r}(r,\phi,z) = \begin{pmatrix} x(r,\phi,z) \\ y(r,\phi,z) \\ z(r,\phi,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial\vec{r}(r,\phi,z)}{\partial r}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(r,\phi,z)}{\partial r}\right|}, \vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial\vec{r}(r,\phi,z)}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(r,\phi,z)}{\partial \phi}\right|}, \vec{e}_z = \frac{\frac{\partial\vec{r}(r,\phi,z)}{\partial z}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(r,\phi,z)}{\partial z}\right|}$$

und bestimmen Sie ihre Skalar- und Kreuzprodukte.

(*) Aufgabe 19 (7P) : Massenpunkt auf Kegel

Ein Massenpunkt bewegt sich auf der inneren Seite eines auf der Spitze stehenden Kegels. Die

Parameterdarstellung seiner Bahnkurve lautet für $0 \leq t \leq t_0$ in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \cos \omega t \\ \rho_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \sin \omega t \\ h_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \end{pmatrix}, \text{ wobei } \rho_0,\ h_0,\ t_0 \text{ und } \omega \text{ konstante Parameter sind.}$$

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Bahnkurve in Zylinderkoordinaten an.

(b) Skizzieren Sie die Bahnkurve.

(c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Massenpunktes in Zylinderkoordinaten.

(d) (*freiwillig*) Bestimmen Sie die Tangential- und Zentripetalbeschleunigung in Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 20 : Volumen und Oberfläche

(a) Berechnen Sie die Fläche eines Kreises mit Radius R unter Verwendung von (i) kartesische Koordinaten und (ii) Polarkoordinaten.

(b) Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen einer Kugel mit Radius R unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

(c) Berechnen Sie die Mantelfläche und das Volumen eines geraden Kegels mit Höhe H und Öffnungswinkel α unter Verwendung von Kugel- und Zylinderkoordinaten.

Theo A

Blatt 06

Stefan Heitz

Matr. Nr.: 1421950

Tutoriumgruppe 12

Tutor: Marius Kist

Aufgabe 17: Kugelkoordinaten

a) ges: Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial r}}{\left|\frac{\partial \vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial r}\right|} \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\phi} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$ ✓ 0,5

$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial \vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \theta}\right|} \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}\right| = \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta} = r$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$ ✓ 0,5

$$\vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial \vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial \vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \phi}\right|} \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi} = r\sin\theta$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$ ✓ 0,5

Skalarprodukte:

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \sin\theta\cos\phi\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\cos\theta\sin\phi - \cos\theta\sin\theta$$

$$= \sin\theta\cos\theta\,(\cos^2\phi + \sin^2\phi - 1) = \underline{\underline{0}}$$ ✓ 0,25

$$\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\cos\theta\cos\phi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\phi = \underline{\underline{0}}$$ ✓ 0,25

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin\theta\sin\phi\cos\phi + \sin\phi\sin\theta\cos\phi = \underline{\underline{0}}$$ ✓ 0,25

Kreuzprodukte:

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin^2\theta\sin\phi - \cos^2\theta\sin\phi \\ \cos^2\theta\cos\phi + \sin^2\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\vec{e}_\phi}}$$ ✓ 0,25

$$\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cos^2\phi + \sin^2\phi\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \underline{\underline{\vec{e}_r}}$$ ✓ 0,25

$$\vec{e}_\phi \times \vec{e}_r = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ -\sin^2\phi\sin\theta - \cos^2\phi\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \underline{\underline{\vec{e}_\theta}}$$ ✓ 0,25

b) $$\dot{\vec{e}}_r = \begin{pmatrix} \dot\theta\cos\theta\cos\phi - \dot\phi\sin\phi\sin\theta \\ \dot\theta\cos\theta\sin\phi + \dot\phi\cos\phi\sin\theta \\ -\dot\theta\sin\theta \end{pmatrix} = \dot\theta\vec{e}_\theta + \begin{pmatrix} -\sin\phi\sin\theta\,\dot\phi \\ \cos\phi\sin\theta\,\dot\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \dot\theta\vec{e}_\theta + \dot\phi\vec{e}_\phi\sin\theta$$ ✓ 1P

$$\dot{\vec{e}}_\theta = \begin{pmatrix} -\dot\theta\sin\theta\cos\phi - \dot\phi\sin\phi\cos\theta \\ -\dot\theta\sin\theta\sin\phi + \dot\phi\cos\phi\cos\theta \\ -\dot\theta\cos\theta \end{pmatrix} = -\dot\theta\vec{e}_r + \begin{pmatrix} -\sin\phi\cos\theta\,\dot\phi \\ \cos\theta\cos\phi\,\dot\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\dot\theta\vec{e}_r + \dot\phi e_\phi\cos\theta$$ ✓ 1P

$$\dot{\vec{e}}_\phi = \begin{pmatrix} -\dot\phi\cos\phi \\ -\dot\phi\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\dot\phi\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\dot\phi\,(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$$ ✓ 1P

Nebenrechnung:

$$\sin\theta\cdot\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} + \cos\theta\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $r(t) = r\cdot\vec{e}_r$

$$\Rightarrow \dot r(t) = r\cdot\dot{\vec{e}}_r + \dot r\cdot\vec{e}_r$$

$$= r\cdot(\dot\theta\vec{e}_\theta + \dot\phi\vec{e}_\phi\sin\theta) + \dot r\vec{e}_r$$

$$= \dot\theta r\vec{e}_\theta + \dot\phi r\vec{e}_\phi\sin\theta + \dot r\vec{e}_r$$ ✓ 0,5

$$\ddot r(t) = \ddot\theta\vec{e}_\theta r + \dot\theta\dot{\vec{e}}_\theta r + \dot\theta\vec{e}_\theta\dot r + \ddot\phi\vec{e}_\phi r\sin\theta + \dot\phi\dot{\vec{e}}_\phi r\sin\theta$$
$$+ \dot\phi\vec{e}_\phi\dot r\sin\theta - \dot\phi\dot\theta\vec{e}_\phi r\cos\theta + \ddot r\vec{e}_r + \dot r\dot{\vec{e}}_r$$

$\Rightarrow \dot{\vec{e}}_\theta, \dot{\vec{e}}_\phi$ und $\dot{\vec{e}}_r$ einsetzen

$$\Rightarrow \ddot r(t) = \vec{e}_r(\ddot r - \dot\theta^2 r - \dot\phi^2 r\sin^2\theta)$$ ✓ 1P
$$+ \vec{e}_\theta(\ddot\theta r + 2\dot\theta\dot r - \dot\phi^2 r\sin\theta\cos\theta)$$ ✓ 1P
$$+ \vec{e}_\phi(\ddot\phi r\sin\theta + 2\dot\phi\dot r\sin\theta) + (2\,r\cos(\theta)\,\dot\theta\dot\phi)\,\vec{e}_\phi$$

d) $|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{\dot{\theta}^2 r^2 + \dot{\phi}^2 r^2 \sin^2\theta + \dot{r}^2}$

Schreib mehr hin.
Wenn du nur das Ergebnis hinschreibst
und da irgendwas falsch ist
hab ich keinen Spielraum mehr.

8,5

Aufgabe 18: Zylinderkoordinaten

$$\vec{e}_r = \frac{\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}\right|} \quad , \quad \left|\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = 1$$

$$\Rightarrow \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$ ✓ 0,5

$$\vec{e}_\phi = \frac{\begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}\right|} \quad , \quad \left|\begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{r^2\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi} = r$$

$$\Rightarrow \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$ ✓ 0,5

$$\vec{e}_z = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ✓ 0,5

Skalarprodukte:

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin\phi\cos\phi + \sin\phi\cos\phi = 0$$

$$\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$ ✓ 0,75

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Kreuzprodukte:

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\phi : \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ \cos^2\phi + \sin^2\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_z$$

✓ 0,75

$$\vec{e}_\phi \times \vec{e}_z : \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_r$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_r : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_\phi$$

Aufgabe 19: Massenpunkt auf Kegel

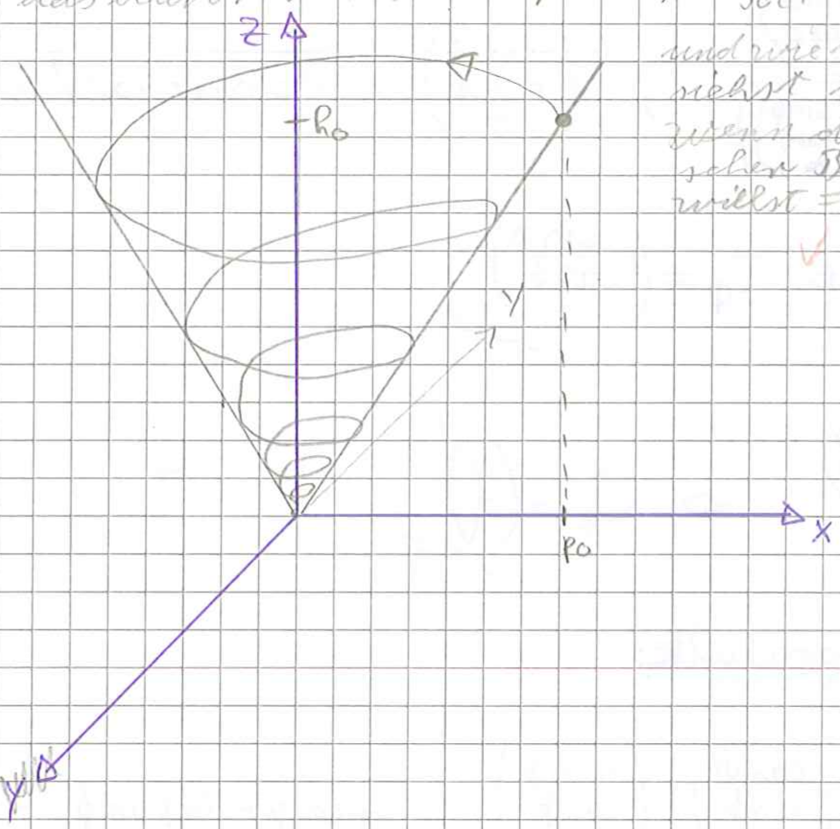
✓ 1,5

a) $$\vec{r} = \begin{pmatrix} r(t) \\ \phi(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 (1-\frac{t}{t_0}) \\ \omega t \\ h_0 (1-\frac{t}{t_0}) \end{pmatrix} = \left(\rho_0 (1-\frac{t}{t_0})\right) \vec{e}_r + \left(h_0 (1-\frac{t}{t_0})\right) \vec{e}_z \quad \text{mit } \phi = \omega t$$

↳ Wenn du das davor schreibst heißt es $\vec{r} = \rho_0 (1-\frac{t}{t_0}) \vec{e}_x + \omega t \vec{e}_y + h_0 (1-\frac{t}{t_0}) \vec{e}_z$ und wie du auf dem Blatt siehst stimmt das nicht wenn du es in zylindrischer Basis schreiben willst $\Rightarrow \vec{r} = \rho_0 (1-\frac{t}{t_0}) \vec{e}_r + h_0 (1-\frac{t}{t_0}) \vec{e}_z$

✓ 1P

b)



c) $\dot{r} = -\frac{\rho_0}{t_0}$, $\dot{\phi} = \omega$, $\dot{z} = -\frac{h_0}{t_0}$

$\ddot{r} = 0$, $\ddot{\phi} = 0$, $\ddot{z} = 0$

allg:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \\ \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = -\frac{\rho_0}{t_0}\vec{e}_r + \left(\rho_0\omega - \frac{\rho_0\omega t}{t_0}\right)\vec{e}_\phi + \left(-\frac{h_0}{t_0}\right)\vec{e}_z$$

✓ 2P

$$\ddot{\vec r} = \begin{pmatrix} \cancel{\ddot r\cos\phi} - \dot r\dot\phi\sin\phi - \dot r\dot\phi\sin\phi - \cancel{r\ddot\phi\sin\phi} - r\dot\phi^2\cos\phi \\ \cancel{\ddot r\sin\phi} + \dot r\dot\phi\cos\phi + \dot r\dot\phi\cos\phi + \cancel{r\ddot\phi\cos\phi} - r\dot\phi^2\sin\phi \\ \cancel{\ddot z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\dot r\dot\phi\sin\phi - r\dot\phi^2\cos\phi \\ 2\dot r\dot\phi\cos\phi + r\dot\phi^2\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = 2\dot r\dot\phi\,\vec e_\phi - r\dot\phi^2\,\vec e_r$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{p_0}{t_0}\right)\cdot\omega\cdot\vec e_\phi - \left(p_0\left(1-\frac{t}{t_0}\right)\right)\cdot\omega^2\cdot\vec e_r$$

$$= -\frac{2p_0\omega}{t_0}\,\vec e_\phi - \left(p_0 - \frac{p_0 t}{t_0}\right)\omega^2\,\vec e_r$$

1,5

~~1,5~~

Theotut

(19)

d) $\vec{a} = \underbrace{a(t)\cdot\vec{\tau}}_{\vec{a}_{\parallel}} + \underbrace{v(t)\cdot\dot{\vec{\tau}}}_{\vec{a}_{\perp}}$, $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, $|\vec{v}(t)| = v$, $a = \frac{dv}{dt}$

$\to \vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel}$

$$\vec{v} = -\left(\frac{\rho_0}{t_0}\right)\vec{e}_r + \rho_0\left(1-\frac{t}{t_0}\right)\omega\,\vec{e}_\phi - \left(\frac{h_0}{t_0}\right)\vec{e}_z$$

$$|\vec{v}| = v = \left(\left(\frac{\rho_0}{t_0}\right)^2 + \rho_0^2\left(1-\frac{t}{t_0}\right)^2\omega^2 + \left(\frac{h_0}{t_0}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{t_0}\left(\rho_0^2 + h_0^2 + \rho_0^2\omega^2(t_0-t)^2\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{t_0}(\ldots)^{-1/2}\left(-2\rho_0^2\omega^2(t_0-t)\right)$$

$$\to \vec{a}_{\parallel} = a\frac{\vec{v}}{v} = \frac{-\rho_0^2\omega^2(t_0-t)}{(\rho_0^2+h_0^2+\rho_0^2\omega^2(t_0-t)^2)\,t_0}\left[\rho_0\vec{e}_r - \rho_0\omega(t_0-t)\vec{e}_\phi + h_0\vec{e}_z\right]$$

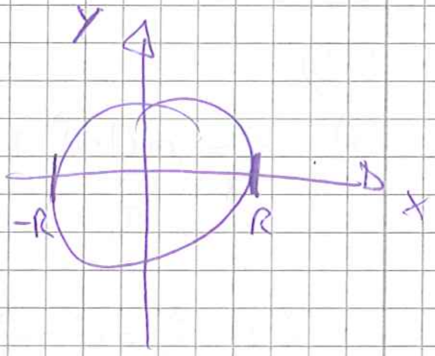
$$\vec{a}_{\perp} = \rho_0\omega^2\left(1-\frac{t}{t_0}\right)\left[-1-\frac{\rho_0^2}{\rho_0^2+h_0^2+\rho_0^2\omega^2(t_0-t)^2}\right]\vec{e}_r$$

$$+ \frac{\rho_0\omega}{t_0}\left[-2+\frac{\rho_0^2\omega^2(1-t/t_0)^2}{\rho_0^2+h_0^2+\rho_0^2\omega^2(t_0-t)^2}\right]\vec{e}_\phi$$

$$- \frac{\rho_0^2 h_0\omega^2(1-t/t_0)}{\rho_0^2+h_0^2+\rho_0^2\omega^2(t_0-t)^2}\,\vec{e}_z$$

20

a) (i) kart: $R^2 = x^2 + y^2$



↳ $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$

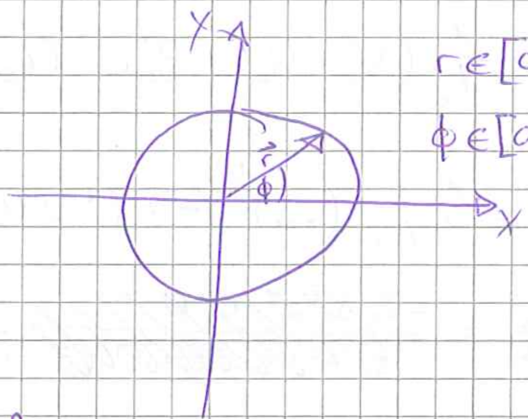
$$A = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx \quad \rightarrow x = R\cos\phi$$

$$= +2 \int_0^{\pi} \sqrt{R^2 - R^2\cos^2\phi}\,(-R\sin\phi)\, d\phi$$

$$= -2R^2 \int \sqrt{1 - \cos^2\phi}\, \sin\phi\, d\phi$$

$$= \pi R^2$$

(ii) Polarkoordinaten:



$r \in [0, R]$

$\phi \in [0, 2\pi]$

$$A = \int_0^R r\, dr \int_0^{2\pi} d\phi = \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^R 2\pi = \pi R^2$$

b) Kugelkoordinaten:

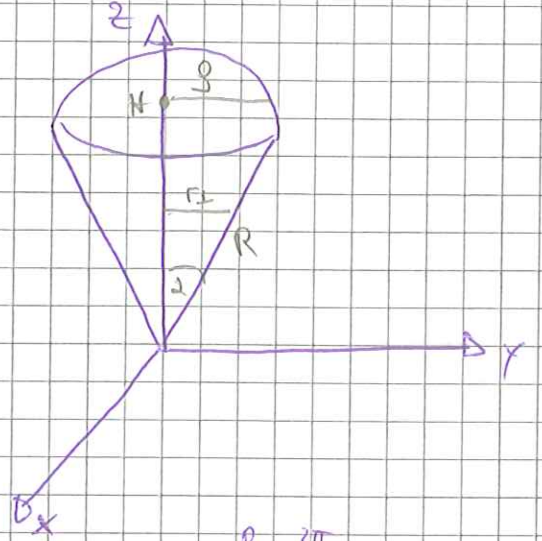
$$dV = r^2 \sin^2\Theta\, dr\, d\Theta\, d\phi$$

$$V = \int_0^R r^2\, dr \int_0^{\pi} \sin\Theta\, d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \left(\frac{1}{3} r^3 \Big|_0^R\right) \left(-\cos\Theta \Big|_0^{\pi}\right) \left(\phi \Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$A = \int_0^{\pi} d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi\, R^2 \sin\Theta = R^2 \left(-\cos\Theta \Big|_0^{\pi}\right) \left(\phi \Big|_0^{2\pi}\right) = 4\pi R^2$$

c)



$$\cos\alpha = \frac{H}{R} \rightarrow R = \frac{H}{\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{\rho}{R} \rightarrow \rho = R\sin\alpha = H\tan\alpha$$

Kugel:

$$A = \int_0^R \int_0^{2\pi} r_\perp \, d\phi \, dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} \underbrace{r\sin\alpha}_{r_\perp} \, d\phi \, dr$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \sin\alpha \Big|_0^R \phi \Big|_0^{2\pi} = \pi R \rho$$

$$V = \int_0^\alpha \sin\theta \, d\theta \int_0^{R(\theta)} r^2 \, dr \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= 2\pi \int_0^\alpha \frac{1}{3}\left(\frac{H}{\cos\theta}\right)^3 \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3} H^3 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2\theta}\Big|_0^\alpha\right) = \frac{1}{3}\pi\rho^2$$

Zylinder:

$$dA = \frac{r_\perp \, d\phi \, dz}{\cos\alpha} \qquad r_\perp = H\tan\alpha = z\tan\alpha$$

$$A_M = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \int_0^H z \, dz \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \frac{1}{2} H^2 \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \pi R \rho$$

$$V = \int_0^z dz \int_0^{z\tan\alpha} r_\perp \, dr_\perp \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\pi}{3} H \rho^2$$