Theoretische Physik A

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila
www-ttp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/Uebungen

WS 07/08 – Blatt 08
Abgabe: 11.12.2007
Besprechung: 14.12.2007

(*) Aufgabe 25 (10P) : Raketenantrieb

Raketen werden durch den Rückstoß der ausgestoßenen Gase angetrieben. Die Masse der Rakete nimmt in dem Maß ab, in dem der Treibstoff verbraucht wird.

(a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für eine Rakete, die in einem homogenen Gravitationsfeld vertikal aufwärts fliegt. Leiten Sie diese Gleichung unter der Annahme her, dass die Rakete die Verbrennungsgase mit konstanter Rate α (verbrannte Treibstoffmasse pro Sekunde) und konstanter Geschwindigkeit v_0 relativ zur Rakete in Richtung des Gravitationsfeldes ausstößt.

(b) Integrieren Sie diese Gleichung unter der Annahme, dass die Rakete zur Zeit $t = 0$ aus der Ruhe startet. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Rakete in Abhängigkeit von Anfangsmasse m_0.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Beschleunigung als Funktion der Zeit und verwenden Sie die Gleichung

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

(c) Welchen Weg hat die Rakete nach der Zeit t zurückgelegt?

(d) Wie hoch fliegt die Rakete und nach welcher Zeit erreicht sie ihren höchsten Bahnpunkt? Betrachten Sie dazu $v_0 \geq \frac{m_0 g}{\alpha}$.

(e) (*freiwillig*) Was passiert für $v_0 < \frac{m_0 g}{\alpha}$?

(*) Aufgabe 26 (10P) : Atwood Maschine

(a) Zwei Massen m_1 und m_2 hängen an den beiden Enden eines Seils (siehe Abb. 1), das über eine feste, reibungslose Rolle mit vernachlässigbarer Masse geführt ist. Berechnen Sie (i) die Beschleunigung der Massen und (ii) die Spannung des Seils.
(iii) Betrachten Sie nun den Fall, dass zwei Affen mit den Massen m_1 und m_2 an den beiden Enden des Seils hängen. Der Affe mit der Masse m_1 beginnt mit der Beschleunigung a relativ zur Rolle nach oben zu klettern, während der zweite Affe relativ zum Seil in seiner Ruhelage verharrt. Bestimmen Sie die Beschleunigung des zweiten Affen relativ zur Rolle.

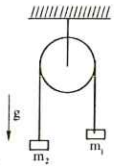


Abb. 1

(b) An dem einen Ende eines Seils, das über eine feste, reibungslose und sich nicht drehende Rolle geführt ist, hängt eine Masse m_1 (siehe Abb. 2). An dem anderen Ende ist die Halterung für eine zweite sich nicht drehende und masselose Rolle befestigt, die ihrerseits ein Seil mit den beiden Massen m_2 und m_3 trägt. Bestimmen Sie die Beschleunigungen der drei Massen.

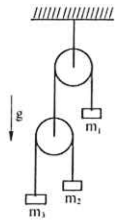


Abb. 2

(c) Betrachten Sie nun eine unendliche Atwood Maschine (siehe Abb. 3), wobei alle Massen gleich m sind und alle Rollen reibungslos und mit vernachlässigbarer Masse sind. Berechnen Sie die Beschleunigung der obersten Masse.
Hinweis: Verallgemeinern Sie zunächst das Resultat von Aufgabe 26(b), indem Sie die effektive Wirkung des System von den ersten $(n-1)$ Rollen auf der n-te Rolle bestimmen und betrachten Sie danach den Limit $n \to \infty$.

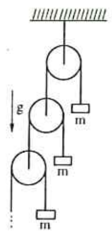
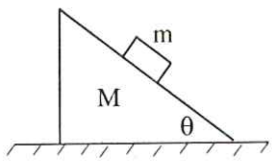


Abb. 3

Aufgabe 27 : Bewegung auf einer schiefen Ebene

Eine Masse m gleitet auf einer schiefen Ebene der Masse M, die auf eine reibungslosen horizontalen Fläche steht, herab. Der Reibungskoeffizient zwischen der Masse und der schiefen Ebene ist μ.



(a) Berechnen Sie die Beschleunigung der Masse und der schiefen Ebene beim Herabgleiten der Masse.

(b) Bestimmen Sie die Beschleunigung der Ebene für die Grenzfälle $M \ll m$ und $M \gg m$.

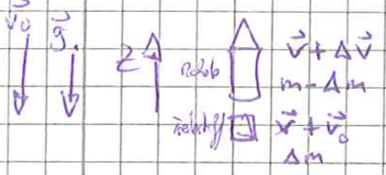
(c) Bestimmen Sie den Kippwinkel θ, für den die Beschleunigung der Ebene maximal wird.

Aufgabe 28 : Zeitliche Änderung eines Vektors

Zeigen Sie, dass für die zeitliche Änderung eines Vektors $\vec{b}$ konstanter Länge, der um eine raumfeste Achse mit der Wikelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotiert, folgende Gleichung gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{b}$$

25) Rakete (Lsg laut Übungsleiter:in)



$\vec{v}_0 = -v_0\,\vec{e}_z$

$g = -g\,\vec{e}_z$

a) $P(t) = m(t)\,\vec{v}(t)$,

$P(t+\Delta t) = (m-\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v}) + \Delta m(\vec{v}+\vec{v}_0)$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = F_{Grav.} = m(t)\,g = F$$

$$F\Delta t = \Delta p = p(t+\Delta t) - p(t) = \cancel{m\vec{v}} + m\Delta\vec{v} - \cancel{\Delta m\vec{v}} - \Delta m\Delta\vec{v} + \cancel{\Delta m\vec{v}} + \Delta m\vec{v}_0 \cancel{- m\vec{v}}$$

$$F\Delta t = m\,\Delta\vec{v} + \Delta m\,\vec{v}_0 - \Delta m\,\Delta\vec{v}$$

$$F = m(t)\vec{g} = m\,\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t}\,\vec{v}_0 - \Delta m\,\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta m\to 0}} m(t)\vec{g} = m\,\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}\,\vec{v}_0$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = +\vec{g} - \frac{\vec{v}_0}{m}\underbrace{\frac{dm}{dt}}_{-\alpha} \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt}\,\vec{e}_z = -g\,\vec{e}_z + \frac{v_0\,\alpha}{m}\,\vec{e}_z}$$

b) $$\frac{dm}{dt} = -\alpha \Rightarrow \int_0^{m(t)} dm = \int_0^t -\alpha\,dt \Rightarrow m(t) = (-\alpha t + m_0)$$

$$\int_0^t \frac{dv(t)}{dt}\,dt = v(t)$$

$$\int_0^t \left(\vec{g} - \frac{v_0\,\alpha}{m(t)}\right) dt = \vec{g}\,t - v_0\,\alpha \int \frac{1}{m(t)}\,dt$$

$$= \vec{g}\,t + \vec{v}_0 \int (-\alpha)\,\frac{1}{m_0 - \alpha t}\,dt = \vec{g}\,t + \vec{v}_0\left[\ln(m_0-\alpha t) - \ln(m_0)\right]$$

$$= \boxed{-g\,t\,\vec{e}_z + v_0\,\vec{e}_z\,\ln\left[\frac{m_0}{m_0-\alpha t}\right]}$$

c) $s(t) = \int_0^t |\vec{v}(t)|\, dt$

$$= \int_0^t \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gt + v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right) \end{pmatrix} \right| dt$$

$$= \int_0^t \sqrt{\left(-gt + v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right)\right)^2}\, dt$$

$$= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \frac{1}{\alpha} \int (-\alpha) \ln(m_0 - \alpha t) - (-\alpha) \ln m_0 \, dt$$

Heitz, Stefan 1421950
Tutor: Marius Kist
Tutoriumgruppe 12

Theo A
Blatt 08

Aufgabe 25: Raketenantrieb.

a) F_r = Resultierende Kraft auf Rakete
F_G = Gewichtskraft der Rakete
F_p = Kraft durch Impulsänderung des Gases
$m(t)$ = Masse der Rakete, inkl. Resttreibstoff

$$F_r = -F_G + F_p$$

✓ 1 P

$$\longrightarrow (m(t)v(t))^{\cdot} = -m(t)g + \frac{dm(t)}{dt}(v - v_0) \quad , \text{mit } m(t) = m_0 - \alpha t$$

✓ 1 P

folgt daraus: $\frac{dv(t)}{dt} = -g + \frac{v_0 \cdot \alpha}{m_0 - \alpha t}$ ✓ 1 P

b) $\frac{dv(t)}{dt} = -g + \frac{v_0 \cdot \alpha}{m_0 - \alpha t} \quad \Big| \cdot dt$

$$dv(t) = -g\,dt + \frac{v_0 \alpha}{m_0 - \alpha t}\,dt$$

✓ 0,5

$$\Rightarrow v(t) = \int_0^t -g + \frac{v_0 \alpha}{m_0 - \alpha t}\,dt = -gt + v_0 \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right)$$ ✓ 1 P

c) Integrieren der Geschwindigkeit führt zu

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \left(\frac{m_0 - \alpha t}{\alpha} \ln \frac{m_0 - \alpha t}{m_0} + t\right)v_0$$ ✓ 2,5 P

d) $v(t) = 0 \rightarrow$ wird für geg. Bedingungen nicht 0 $\Rightarrow$ Einführung der Brenndauer t_B

$$\Rightarrow v(t_B) = v_{End} = -gt_B + v_0 \ln \frac{m_0}{m_0 - \alpha t_B}$$

Für $t > t_B$ folgt:

$$v_{neu} = -g t_{neu} + v_{End} = 0$$

Für Hochpunkt:

$$t_2 = -t_B + \frac{v_0}{g} \ln \frac{m_0}{m_0 - \alpha t_B}$$

$$\Rightarrow t_{Hochpunkt} = t_B + t_2 = \frac{v_0}{g} \ln \frac{m_0}{m_0 - \alpha t_B}$$

$$\Rightarrow s_{Hochpunkt} = s(t_B) - \frac{1}{2} g t_2^2 + v_{End} t_2 = \underline{\underline{\left(t_B + \left(\frac{m_0 - \alpha t_B}{\alpha} + t_B\right) \ln \frac{m_0 - \alpha t_B}{m_0}\right) v_0}}$$

t_{max} = Zeit bei der $m_{(t)} = 0$ — hört sich blöd an, dass Gesamtmasse der Rakete = Masse des Treibstoffs, ist in echt aber fast so

$$m_{(t_{max})} = m_0 - \alpha t_{max} = 0 \Rightarrow t_{max} = \frac{m_0}{\alpha}$$

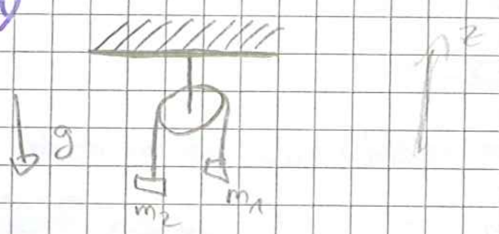
$$z_{max} = z_{(t_{max})} = -\frac{1}{2} g t_{max}^2 + \frac{v_0}{\alpha} \left[\alpha t_{max} + \underbrace{(m_0 - \alpha t_{max}) \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t_{max}}{m_0}\right)}_{\xrightarrow[\text{d. l'Hospital}]{t_{max} \to \frac{m_0}{\alpha}} 0}\right]$$

$$z_{max} = -\frac{1}{2} g \left(\frac{m_0}{\alpha}\right)^2 + \frac{v_0}{\alpha} m_0$$

~~8~~

Aufgabe 26: Atwood Maschine

a)



(i) $m_1: \; T - m_1 g = m_1 a_1$ T := Seilspannung

$m_2: \; -T + m_2 g = m_2 a_2$

$\vec{T}_{e_z} - m_2 g \vec{e}_z = -m_2 a_2 \vec{e}_z$
$\vec{T}_{e_z} - m_1 g \vec{e}_z = m_1 a_1 \vec{e}_z$ falls m_2 runterfällt

$\Rightarrow m_2 a_2 \vec{e}_z = m_2 g \vec{e}_z - T \vec{e}_z$

$-a_1 = a_2$

$\Rightarrow m_1 a_1 + m_1 g = m_2 a_2 + m_2 g$ $\Rightarrow$ Skalare Größen

$\Rightarrow a_1 = a_2 = a$

$a_1 = -a_2: \quad m_1 a_1 + m_1 g = -m_2 a_1 + m_2 g$

$\Rightarrow a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$ ✓ 1P

Würdest du wählen, dass m_1 runter fällt wäre

$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$

$-m_1 a_2 + m_1 g = m_2 a_2 + m_2 g$

$\Rightarrow a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$

= Schwere Masse steht im Zähler vorn

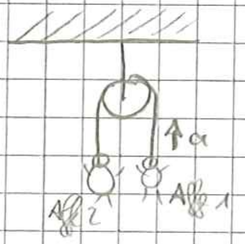
(ii) $T - m_1 g = m_1 a_1 \Leftrightarrow T = m_1 (a_1 + g)$

$a_2 = \frac{m_2 g - T}{m_2} = \frac{T - m_1 g}{m_1} = a_1$

$\Rightarrow T = m_1 \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g + g \right)$

$\Rightarrow T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$ ✓ 1P

(iii) Affe 1 klettert mit a relativ zur Rolle nach oben.



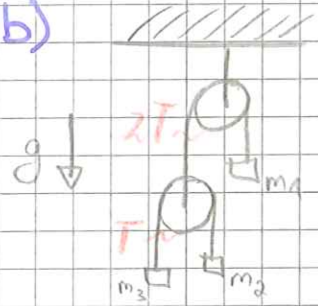
$m_1: \; T + m_1 g = m_1 a$

$m_2: \; -T + m_2 g = m_2 a_2$

$\Rightarrow T = m_1 a - m_1 g = m_2 a_2 + m_2 g$

$\Leftrightarrow m_2 a_2 = m_1 a - m_1 g + m_2 g$

$\Rightarrow a_2 = \frac{(m_2 - m_1) g \mp m_1 a}{m_2}$ ✓ 1P b)



T: Seilkraft im oberen Seil

R: " " unteren "

a_1: Beschl. der Masse m_1 relativ zur oberen Rolle

a_2: " " " m_2 " " unteren Rolle

a_{rel2}: " " " m_2 " " oberen Rolle

a_{rel3}: " " " m_3 " " oberen Rolle

$\Rightarrow m_1 a_1 = R - m_1 g$

$m_2 a_{rel2} = T - m_2 g$

$m_3 a_{rel3} = T - m_3 g$

Außerdem gilt:

$a_{rel2} = a_2 - a_1$ $\quad R = 2T$

$a_{rel3} = -a_2 - a_1$

$\Rightarrow m_1 a_1 + m_1 g = 2T$ $\quad$ I $\Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 a_1 + \frac{1}{2} m_1 g = T$

$m_2 a_2 - m_2 a_1 + m_2 g = T$ $\quad$ II

$-m_3 a_2 - m_3 a_1 + m_3 g = T$ $\quad$ III

$$\Rightarrow a_1 = \frac{-m_1 m_2 + 4 m_2 m_3 - m_1 m_3}{m_1 m_2 + 4 m_2 m_3 + m_1 m_3} g$$ ✓ 1

$$a_2 = \frac{2 m_1 m_3 - 2 m_1 m_2}{m_1 m_2 + 4 m_2 m_3 + m_1 m_3} g$$

$$a_{rel2} = \frac{-3 m_1 m_3 + 4 m_2 m_3 + m_1 m_2}{m_1 m_2 + 4 m_2 m_3 + m_1 m_3} g$$ ✓ 1

$$a_{rel3} = \frac{-3 m_1 m_2 + 4 m_2 m_3 + m_1 m_3}{m_1 m_2 + 4 m_2 m_3 + m_1 m_3} g$$ ✓ 1

$$a_2 + a_3 = 2 a_1 \Rightarrow \frac{m_2 g - T}{m_2} + \frac{m_3 g - T}{m_3} \overset{!}{=} 2 \frac{2T - m_1 g}{m_1}$$

$$\Rightarrow T = \frac{4 g\, m_1 m_2 m_3}{m_3 m_1 + m_2 m_1 + 4 m_2 m_3} = \frac{4 \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} m_1}{4 \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} + m_1} g$$

c) alle Gewichte gleich schwer, d.h. $a_1 = \frac{m}{3m} g$

$a_{rel2} = \frac{-m}{3m} g$

$a_{rel3} = \frac{-m}{3m} g$

Zudem gilt $2R = \frac{4}{3} mg = 4T$

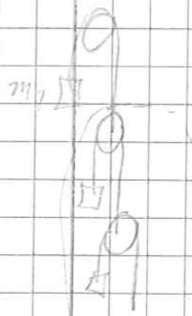
$\Rightarrow$ Vgl mit a): $a_1 = \frac{0m}{2m} g$ und $T = 2mg$

$T_{a)} = 2mg$, $T_{b)} = 2 \cdot \frac{1}{3} mg$

$\Rightarrow$ Folge (f_n): $f_1 = 2$, $f_n = 1 + \frac{1}{n+1} f_{n-1}$

Diese Folge hat den Grenzwert 1 $\Rightarrow$ Die oberste Rolle wird rechts und links mit jeweils $m \cdot g$ nach unten gezogen

$\Rightarrow$ sie bleibt unbeschleunigt.



$m_{eff} = 3m$ $a_1 = \frac{g}{2}$

$m_{eff} = \frac{4 m_2 m_3}{m_2 + m_3}$

6

14

c) 

$T' = \frac{2m_1 m_2}{m_1+m_2} g$ 

$T = 2\frac{m_{eff}\, m_1}{m_{eff}+m_1}$

$$m_{eff}(\text{Rolle}) = 4\frac{m_2 m_3}{m_2+m_3}$$

Effekt von R_1 auf R_2 : $m_{eff}(1) = 4\frac{mm}{m+m} = 2m$

Effekt von R_2 auf R_3 : $m_{eff}(2) = 4\frac{m\, m_{eff}(1)}{m_{eff}(1)+m}$

$$\Rightarrow m_{eff}(n) = 4\cdot\frac{m\, m_{eff}(n-1)}{m+m_{eff}(n-1)} = \frac{4^1 m_{eff}(n-1)}{\left(\frac{m_{eff}(n-1)}{m}\cdot\underbrace{1}_{=4^0}+1\right)}$$

$$m_{eff}(n) = \frac{4m\left(\frac{4m\, m_{eff}(n-2)}{m+m_{eff}(n-2)}\right)}{m+\left(\frac{4m\, m_{eff}(n-2)}{m+m_{eff}(n-2)}\right)} = \frac{4\left(\frac{4\, m_{eff}(n-2)}{\frac{m_{eff}(n-2)}{m}+1}\right)}{1+\left(\frac{4\cdot m_{eff}(n-2)}{1+\frac{m_{eff}(n-2)}{m}}\right)}$$

$$= \frac{4\cdot 4\, m_{eff}(n-2)}{1+m_{eff}(n-2)\frac{1}{m}+4m_{eff}(n-2)\cdot\frac{1}{m}} = \frac{4^2 m_{eff}(n-2)}{1+\underbrace{(1+4)}_{4^0+4^1} m_{eff}(n-2)}$$

$$\Rightarrow m_{eff}(n) = \frac{4^n\, m_{eff}(0)}{1+(1+4+\dots+4^{n-1})\frac{m_{eff}(0)}{m}} \longrightarrow m_{eff}(0) = m$$

$$\Rightarrow m_{eff}(n) = \frac{4^n\, m}{1+\sum_{k=0}^{n-1} 4^k} \qquad \text{mit} \quad \sum_{k=0}^{n-1} 4^k = \frac{4^n-1}{4-1}$$

$$\Rightarrow m_{eff}(n) = \frac{4^n\, m}{1+\frac{4^n-1}{4-1}} = 3m\cdot\frac{4^n}{4^n\left(\frac{3}{4^n}+1-\frac{1}{4^n}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \underline{\underline{3m}}$$

aus a) : $a_1 = \frac{m_2-m_1}{m_2+m_1} g = \frac{2m}{4m} g = \underline{\underline{\frac{g}{2}}}$