Theoretische Physik A

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila
`www-ttp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/Uebungen`

WS 07/08 – Blatt 09
Abgabe: 18.12.2007
Besprechung: 21.12.2007

(*) Aufgabe 29 (14P) : Energieerhaltung

Ein Massenpunkt mit zeitlich konstanter Masse m bewegt sich in einer Dimension unter dem Einfluß einer Kraft $F(x)$.

(a) Leiten Sie ausgehend von der Gleichung

$$F(x) = m\ddot{x} \tag{1}$$

den Energieerhaltungssatz her. Drücken Sie dazu die Kraft $F(x)$ durch das zugehörige Potential $V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x'$ aus, multiplizieren Sie die Gleichung (1) mit $\dot{x}$ und integrieren Sie über t.

(b) Die in (a) eingeführte Integrationskonstante kann als Gesamtenergie E interpretiert werden. Zeigen Sie dass, die Umkehrfunktion der Bahnkurve $t(x)$ durch

$$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{E - V(x')}} \tag{2}$$

gegeben ist mit $x(t_0) = x_0$.

(c) (i) Berechnen Sie das Integral (2) für den Spezialfall $F(x) = -kx$ und die Anfangsbedingung $x(0) = x_0\,, \dot{x}(0) = 0$.

(ii) Skizzieren Sie die resultierende Bahnkurve $x(t)$.

(iii) Skizzieren Sie das zugehörige Potential $V(x)$ und bestimmen Sie die Umkehrpunkte der Bewegung.

(d) Lösen Sie Aufgabenteil (c) für $F(x) = ax^2$ mit $a > 0$ und $E = 0$.

(*) Aufgabe 30 (6P) : Gradient, Rotation und Divergenz

(a)(*freiwillig*) Gegeben seien eine skalare Funktion $\phi(\vec{r})$ und eine vektorielle Funktion $\vec{f}(\vec{r})$, die zweimal stetig partiell differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi(\vec{r}) = 0\,,\\
&\text{(ii)} \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{f}(\vec{r}) = 0\,,\\
&\text{(iii)} \quad \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi(\vec{r}) = \triangle\,\phi(\vec{r})\,,\\
&\text{(iv)} \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{f}(\vec{r}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{f}(\vec{r}) - \triangle\,\vec{f}(\vec{r})\,,\\
&\text{(v)} \quad \operatorname{div}(\phi(\vec{r})\,\vec{f}(\vec{r})) = \vec{f}(\vec{r})\cdot\operatorname{grad}\phi(\vec{r}) + \phi(\vec{r})\operatorname{div}\vec{f}(\vec{r})\,,
\end{aligned}$$

wobei der Laplace-Operator „$\triangle$“ gegeben ist durch

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

(b) Betrachten Sie nun die Funktion $\vec{f}(\vec{r}) = \psi(r)\frac{\vec{r}}{r}$ mit $r = |\vec{r}|$. $\psi(r)$ sei eine differenzierbare skalare Funktion. Berechnen Sie

$$\text{(i)} \quad \operatorname{div}\vec{f}(\vec{r}) \quad \text{und} \quad \text{(ii)} \quad \operatorname{rot}\vec{f}(\vec{r})\,.$$

Aufgabe 31 : Phasenraum

Gegeben seien folgende eindimensionale Bahnkurven:

(i) $x(t) = x_0 + v_0 t$, wobei x_0, v_0=konst.

(ii) $x(t) = x_0 + v_0 t + a_0 t^2/2$, wobei x_0, v_0, a_0=konst.

(iii) $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$, wobei x_0, ω=konst.

(iv) $x(t) = a_0 t \sin(\omega t)$, wobei a_0=konst.

Zeichnen Sie für positive Zeiten t die dazugehörigen Kurven im Phasenraumdiagram, wobei für die Anfangsbedingungen $x(0) \geq 0\,, v(0) \geq 0$ gelten soll. Zeichnen Sie auch die Richtung ein, in der die Bahnen durchlaufen werden.

Theo A

Blatt 08

Stefan Heite 1421950
Tutor: Marius Kist
Tutoriumgruppe: 12

Aufgabe 29: Energieerhaltung

a) $F(x) = m\ddot{x}$, $V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')dx'$

$\Rightarrow F = -\frac{dV}{dx} = m\ddot{x} \quad | \cdot \dot{x}$

$-\frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = m\ddot{x}\dot{x}$

$\Leftrightarrow dV = -m\ddot{x}\dot{x}dt$

$\int dV = -m\int \ddot{x}\dot{x}dt$, $\int \ddot{x}\dot{x}dt = \dot{x}\dot{x} - \underbrace{\int \dot{x}\ddot{x}dt}_{=\frac{1}{2}\dot{x}^2}$

$\Rightarrow V = -\frac{1}{2}mv^2 + D$ ✓ 2,5

b) $E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x)$

$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}(E-V) \Rightarrow dt = \frac{dx'}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}$

$x(t_0) = x_0 \Rightarrow \int_{t_0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}$

$\Rightarrow t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{E-V(x')}}$ ✓ 1,5

c) (i) $F(x) = -kx$

$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')dx' = -\int_{x_0}^{x}(-kx')dx' = \frac{1}{2}kx'^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$

$\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{E-V}} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{E-\frac{1}{2}kx'^2+\frac{1}{2}kx_0^2}} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{-\frac{1}{2}k(x'^2-x_0^2-\frac{2E}{k})}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{k}{2}}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2-x_0^2-\frac{2E}{k}}}$

Voraussetzung: $\alpha < 0$, du musst das $\sqrt{-\frac{k}{2}}$ mit in das Integral stecken

Zudem: $\ell = 0$

$c = \left(\frac{E}{} + \frac{k}{2} x_0^2\right)$

soweit ich das verstehe

→ Vgl Blatt 01, Aufgabe 3, $a = 1, b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{2E}{k}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-\frac{k}{2}}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 - x_0^2 - \frac{2E}{k}}} = \frac{1}{\sqrt{-1}\sqrt{\frac{k}{2}}} \left[-\frac{1}{\sqrt{-1}} \arcsin \frac{x' - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 2\frac{E}{k}}} \right]_{x_0}^{x}$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{\frac{k}{2}}} \cdot \frac{1}{i} \cdot \left(\arcsin \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 2\frac{E}{k}}} - \arcsin \frac{x_0 - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 2\frac{E}{k}}} \right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{2}}} \left(\arcsin \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 2\frac{E}{k}}} - \arcsin \frac{x_0 - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 2\frac{E}{k}}} \right)$$

(ii) $\pm(t - t_0)\sqrt{\frac{2}{m}} = \frac{M}{i} \arcsin \frac{x}{\sqrt{L}} - \frac{M}{i} \arcsin \frac{x_0}{\sqrt{L}}$, $L := \frac{2E}{k} + x_0^2$, $M := \frac{1}{i\sqrt{\frac{k}{2}}}$

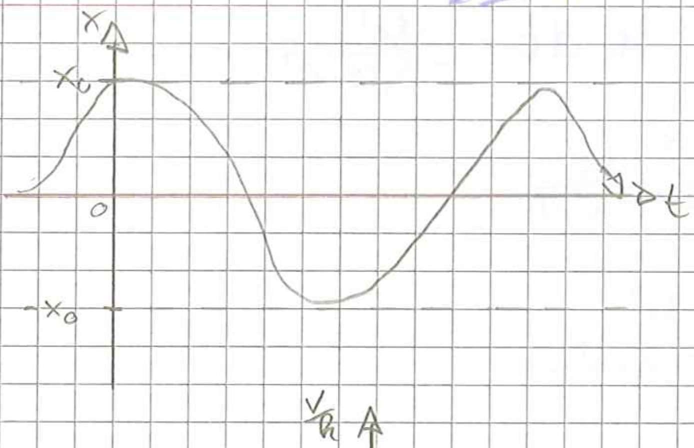
$$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{\sqrt{L}} = \frac{i}{M} \left(\pm(t - t_0)\sqrt{\frac{2}{m}} + \frac{M}{i} \arcsin \frac{x_0}{\sqrt{L}} \right)$$

$$x = \sqrt{L} \sin \left(\frac{i}{M} \left(\pm(t - t_0)\sqrt{\frac{2}{m}} + \frac{M}{i} \arcsin \frac{x_0}{\sqrt{L}} \right) \right)$$

$\dot{x}(0) = 0 : \Rightarrow$ $x = \sqrt{L} \sin \left(\pm i^2 \sqrt{\frac{1}{2}k} \sqrt{\frac{2}{m}}\, t \pm \frac{1}{2}\pi \right)$

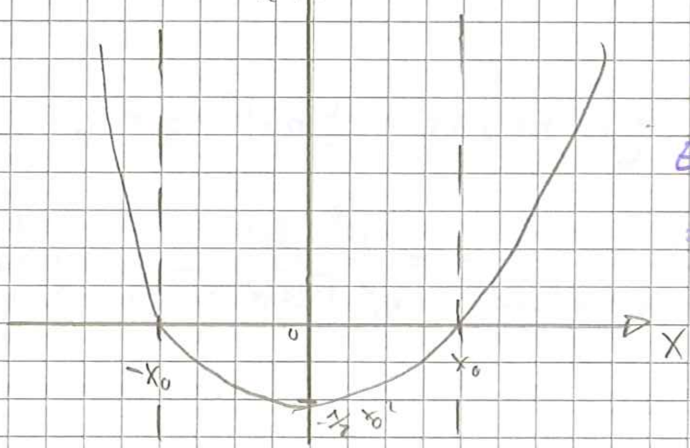
$$x = \pm\sqrt{\frac{2E}{k} + x_0^2}\, \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$x(0) = x_0 \Rightarrow$ $x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$ ✓ 1



✓ 1,5

(iii)



$\pm x_0$ = Umkehrpunkte (UP)

E ist zu Beginn 0 — kannst du so setzen, wird aber erst in der d) gefordert

⇒ UPs liegen bei V=0

9,5

Aufgabe 30: Gradient, Rotation und Divergenz

b) (i) $\operatorname{div} \vec{f}(\vec{r})$

$$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_1 \psi(r)}{r} \\ \frac{x_2 \psi(r)}{r} \\ \frac{x_3 \psi(r)}{r} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \frac{x_k \psi(r)}{r}}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial x_k} \cdot \frac{\psi(r)}{r} + \frac{\partial \psi(r)}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{r} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_k} x_k \cdot \psi(r)$$

wobei $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_k} = \frac{-x_k}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}$

$$= 3 \cdot \frac{\psi(r)}{r} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{y}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{z}{r}\right) - \frac{\psi}{r^3} \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{= r^2}$$

$$= 3 \cdot \frac{\psi}{r} - \frac{\psi}{r} + \underbrace{\operatorname{grad} \psi}_{= \frac{d\psi}{dr} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dr}{dx} \\ \frac{dr}{dy} \\ \frac{dr}{dz} \end{pmatrix}} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{d\psi}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{f} = \frac{2}{r}\psi \cdot \frac{d\psi}{dr}$$

✓ 3P

(ii) $\operatorname{rot} \vec{f}(\vec{r})$

$$(\operatorname{rot} \vec{f}(\vec{r}))_x = (\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r}))_x = \left(\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} \frac{x \psi(r)}{r} \\ \frac{y \psi(r)}{r} \\ \frac{z \psi(r)}{r} \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{\partial \frac{z \psi(r)}{r}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{y \psi(r)}{r}}{\partial z}$$

$$= \frac{z}{r} \frac{y \psi'(r)}{r} - z \psi(r) \frac{y}{r^3} - \frac{y}{r} \frac{z \psi'(r)}{r} + y \psi(r) \frac{z}{r^3} = 0$$

$\rightarrow$ zyklische Vertauschung ergibt: $\operatorname{rot} \vec{f}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓ 3

6

12,5

zu 29 c)

$$\ldots = -\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx'}{\sqrt{1-\frac{x'^2}{a}}}$$

Subst: $\frac{x'}{\sqrt{a}} = \cos\phi \Rightarrow \frac{dx'}{d\phi} = \sqrt{a}\sin\phi$

$$= \cancel{-}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{1}{\cancel{\sqrt{a}}}\int\frac{\cancel{-}\cancel{\sqrt{a}}\,\cancel{\sin\phi}\,d\phi}{\underbrace{\sqrt{1-\cos^2\phi}}_{\cancel{\sin\phi}}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\int d\phi$$

$$\Rightarrow t-t_0 = \sqrt{\frac{m}{k}}\left[\arccos\frac{x'}{\sqrt{a}}\right]_{x'=x_0}^{x} = \sqrt{\frac{m}{k}}\left(\arccos\frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{k}}} - \arccos\frac{x_0}{\sqrt{\frac{2E}{k}}}\right)$$

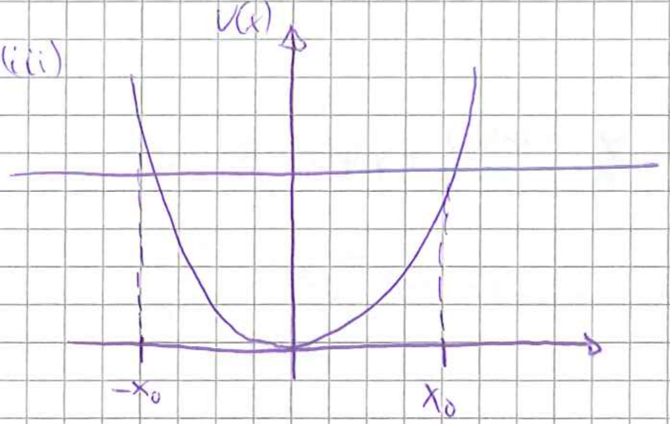
mit $E = \frac{1}{2}kx_0^2$

$$\Rightarrow t-t_0 = \sqrt{\frac{m}{k}}\left(\arccos\frac{x}{x_0} - \underbrace{\arccos 1}_{=0}\right)$$

$t_0 = 0$ (freigewählt „Kosmetik")

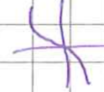
$$\Rightarrow t(x) = \sqrt{\frac{m}{k}}\arccos\frac{x}{x_0}\ ,\ x(t) = x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t$$

(iii)



29d)

$F = ax^2$, $V = -\int_{x_1}^{x} ax^2\,dx$, $a > 0$, $E = 0$

$V = -\frac{1}{3}ax^3 + \underbrace{\frac{1}{3}ax_1^3}_{=0 \text{ gesetzt}}$ (⇒ Potenzial symmetrisch zum Ursprung )

$\underbrace{t - t_0}_{\text{pos}} = \oplus\ominus \sqrt{\frac{m}{2}} \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{a}{3}x'^3}}}$

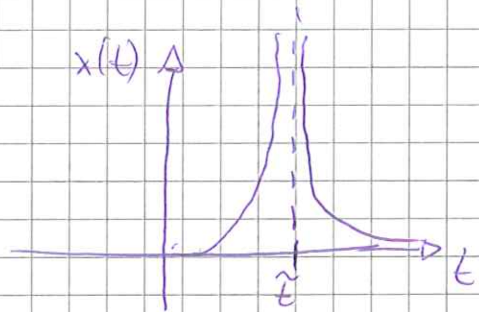
▷ neg $x_0 > x$

▷ pos $x_0 < x$

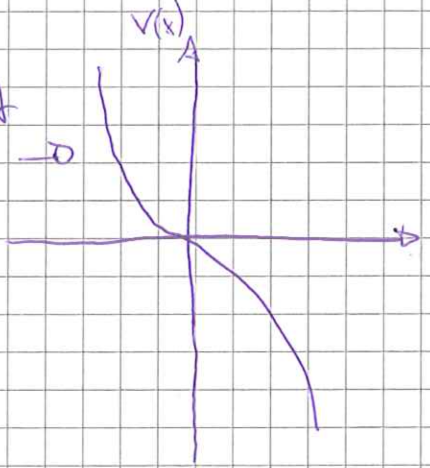
$\Rightarrow t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{\frac{3}{a}} \int_{x_0}^{x} x'^{-3/2}\,dx' = \sqrt{\frac{3m}{2a}} \left[-2x^{-1/2}\right]_{x_0}^{x}$

$= \sqrt{\frac{6m}{a}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x_0}}\right)$

$x(t) = \frac{1}{\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x_0}} - \sqrt{\frac{a}{6m}}(t - t_0)}_{=0 \text{ für } \tilde{t} = t_0 + \sqrt{\frac{6m}{a}}\frac{1}{\sqrt{x_0}}}\right)^2}$

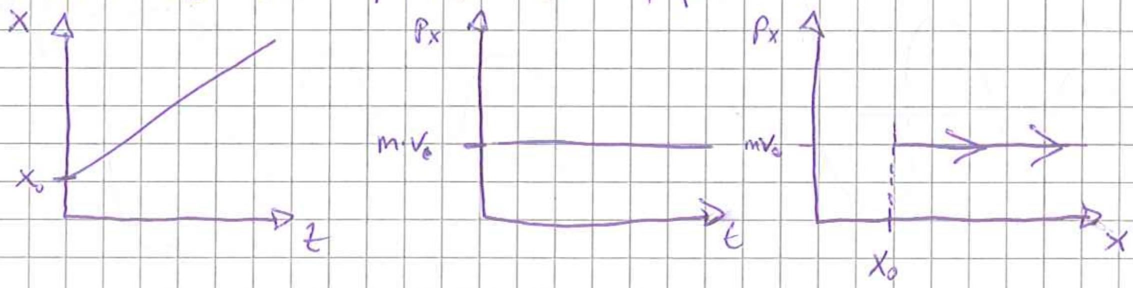


Dieser Ast verboten, da E=0 ⟶

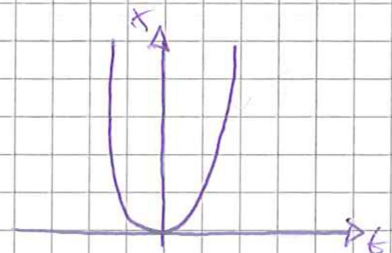


31) Phasendiagramm ~~Pkt~~ p-x-Diagramm

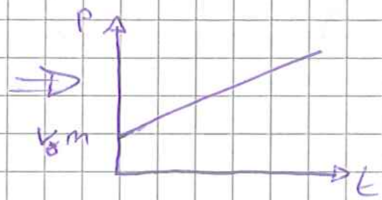
(i) $x(t) = x_0 + v_0 t$, $v(t) = v_0$, $p = m \cdot v$

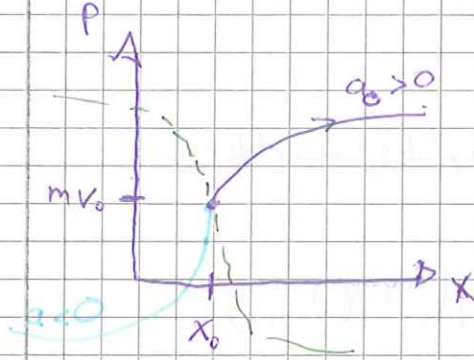


(ii) $x(t) = (x_0 + v_0 t) + \frac{a_0}{2} t^2$



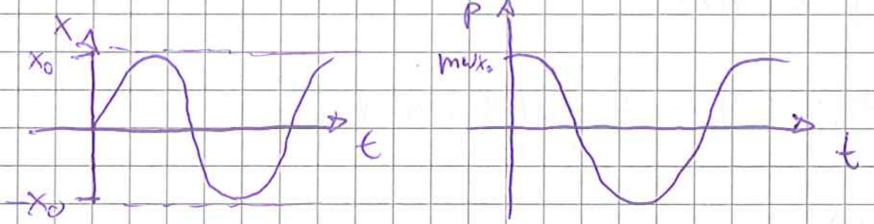
$V_x(t) = v_0 \cdot a_0 t = v_x \cdot m$

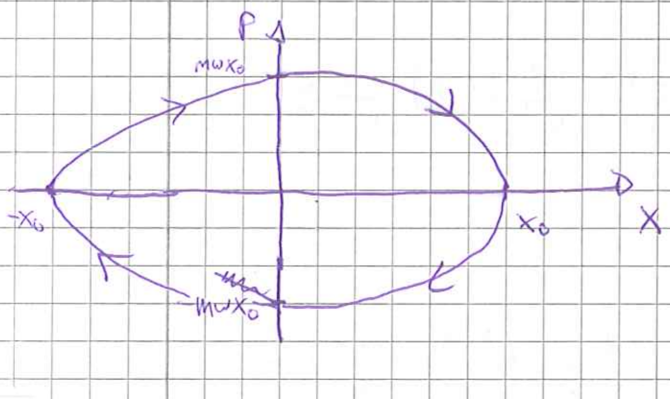




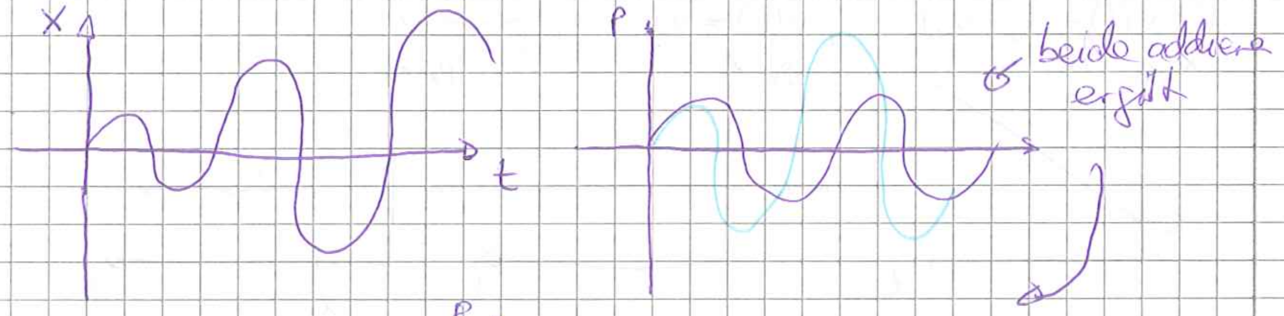
: verboten, da $t < 0$

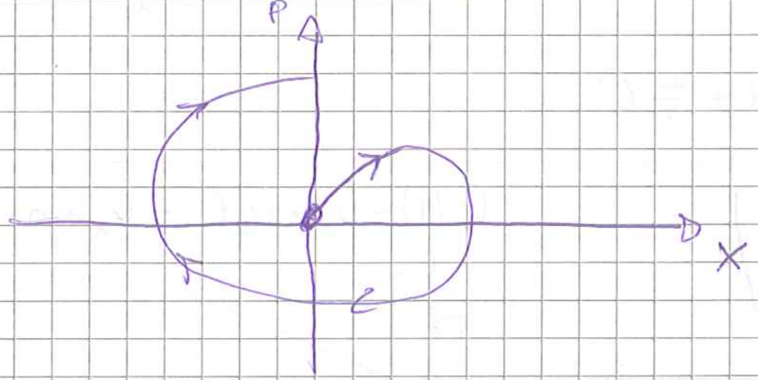
(iii) $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$, $v = x_0 \omega \cos(\omega t)$





(iv) $x(t) = a_0 t \sin(\omega t)$, $v = a_0 \sin(\omega t) + a_0 \omega t \cos(\omega t)$





30)

a) (v) $\mathrm{div}(\phi(\vec r)\vec f(\vec r)) = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi f_x\\ \phi f_y\\ \phi f_z\end{pmatrix} = \partial_x(\phi f_x) + \partial_y(\phi f_y) + \partial_z(\phi f_z)$

$= (\partial_x\phi) f_x + \phi(\partial_x f_x) + (\partial_y \phi) f_y + \phi(\partial_y f_y) + (\partial_z \phi) f_z + \phi(\partial_z f_z)$

$= \left(f_x(\partial_x \phi) + f_y(\partial_y\phi) + f_z(\partial_z\phi)\right) + \phi(\partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z)$

$= \vec f(\vec r)\cdot \mathrm{grad}\,\phi + \phi \cdot \mathrm{div}\,\vec f(\vec r)$

b) (i) $\mathrm{div}\,\vec f(\vec r) = \mathrm{div}\left(\psi(r)\cdot\frac{\vec r}{r}\right) = \frac{\vec r}{r}\,\mathrm{grad}\,\psi + \psi\,\mathrm{div}\frac{\vec r}{r}$

$\frac{\vec r}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

$\mathrm{div}\frac{\vec r}{r} = \frac{1}{\sqrt{\dots}} + \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\frac{\cancel{2}x\cdot x}{(\dots)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{\dots}} + \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\frac{\cancel{2}y\cdot y}{(\dots)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{\dots}} + \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\frac{\cancel{2}z\cdot z}{(\dots)^{3/2}}$

$= \frac{3}{r} - \frac{1}{r^3}\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{r^2} = \frac{2}{r}$

$\mathrm{grad}\,\psi = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\psi(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = \begin{pmatrix}\partial_x r\,\frac{d\psi}{dr}\\ \partial_y r\,\frac{d\psi}{dr}\\ \partial_z r\,\frac{d\psi}{dr}\end{pmatrix} = \frac{d\psi}{dr}\,\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{1}{\sqrt{\dots}}\begin{pmatrix}\cancel{2}x\\ \cancel{2}y\\ \cancel{2}z\end{pmatrix} = \frac{d\psi}{dr}\cdot\frac{\vec r}{r}$

$\Rightarrow \mathrm{div}\,\vec f(\vec r) = \frac{\vec r}{r}\,\mathrm{grad}\,\psi + \psi\,\mathrm{div}\frac{\vec r}{r}$