

Theoretische Physik A

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila
www-ttp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/Uebungen

WS 07/08 – Blatt 10

Abgabe: 08.01.2008

Besprechung: 11.01.2008

(*) Aufgabe 32 (8P) : Teilchen im 1-dimensionalen Potential

Ein Massenpunkt der Masse m und Energie E bewegt sich im Potential

$$V(x) = V_0(e^{-2ax} - 2e^{-ax}) \quad \text{mit} \quad V_0, a > 0 \quad \text{und} \quad -V_0 < E < 0.$$

(a) Skizzieren Sie $V(x)$ und bestimmen Sie die Umkehrpunkte der Bewegung.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von Gleichung (2) von Blatt 09 die Schwingungsdauer T des Teilchens.

Hinweis: Es erweist sich als sinnvoll, die dimensionslose Größe $\epsilon = |E/V_0|$, sowie $u = e^{-ax}$ einzuführen.

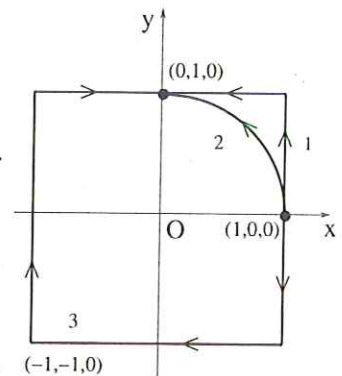
(*) Aufgabe 33 (12P) : Wegintegrale

Gegeben seien die drei Kräfte

$$(a) \vec{F}_1(\vec{r}) = \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (b) \vec{F}_2(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^2}, \quad (c) \vec{F}_3(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Wegintegrale $\int_C \vec{F}_i(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, $i = 1, 2, 3$ entlang der drei skizzierten Wege in der xy -Ebene von $(1, 0, 0)$ nach $(0, 1, 0)$.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\vec{F}_3$ auf der z -Achse nicht definiert ist.



Aufgabe 34 : Stoke'scher Satz

Verifizieren Sie den Stoke'schen Satz

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A}$$

für den Fall, dass der Weg C einen Kreis in der xy -Ebene mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung beschreibt. Weiterhin soll für die Kraft gelten: $\vec{F} = (-y, x, 0)^T$.

Hinweis: Im vorliegenden Fall ist der Vektor $d\vec{A}$ gegeben durch $\vec{e}_z dx dy$.

Aufgabe 35 : Drehimpuls

Ein Massenpunkt m bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf der inneren Seite eines auf der Spitze stehenden Kegels mit dem Öffnungswinkel α . Berechnen Sie den Drehimpuls bezüglich der Spitze des Kegels und seine erste zeitliche Ableitung unter der Annahme, dass die Bahnkurve des Massenpunktes in einer horizontalen Ebene verläuft, die sich im Abstand d von der Spitze des Kegels befindet. Können Sie ohne explizite Rechnung des Drehimpulses bestimmen, welche von seinen Komponenten erhalten sind?

Theo A
Blatt 10

Stefan Heitz

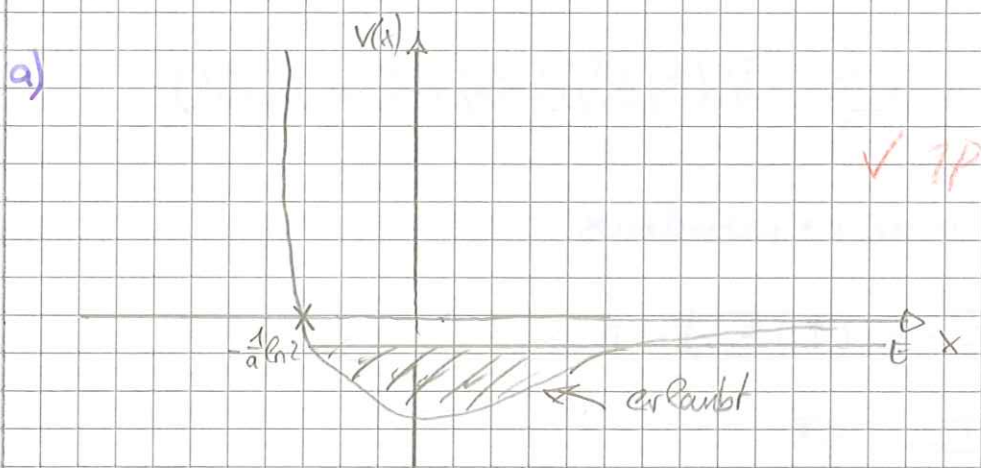
Matr.-Nr.: 1421950

Tutoriumgruppe: 12

Tutor: Marius Kist

Aufgabe 32: Teilchen im 1-dimensionalen Potential

$$V(x) = V_0(e^{-2ax} - 2e^{-ax})$$



Umkehrpunkte: $E = V(x)$

$$\Rightarrow \frac{E}{V_0} = e^{-2ax} - 2e^{-ax} \Leftrightarrow \frac{E}{V_0} = (e^{-ax})^2 - 2e^{-ax} + 1 - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{E}{V_0} = (e^{-ax} - 1)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{E}{V_0} + 1 = (e^{-ax} - 1)^2 \Leftrightarrow \pm \sqrt{\frac{E}{V_0} + 1} = e^{-ax} - 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 \pm \sqrt{\frac{E}{V_0} + 1}) = -ax \Rightarrow x_{KE} = -\frac{1}{a} \ln(1 \pm \sqrt{\frac{E}{V_0} + 1})$$

b) Gleichung (2) von Blatt 09: $t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}}$

$$\frac{E}{V_0} =: \varepsilon, \quad e^{-ax} =: u, \quad du = -ae^{-ax} dx'$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - V_0(e^{-2ax} - 2e^{-ax})}} = \int_{u_0}^u \frac{dx'}{\sqrt{\varepsilon - (e^{-2ax} - 2e^{-ax})}} = \frac{1}{\sqrt{V_0}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\varepsilon - (e^{-2ax} - 2e^{-ax})}}$$

$$= -\frac{1}{a\sqrt{V_0}} \int_{u_0}^u \frac{du}{u\sqrt{\varepsilon - u^2 + 2u}} = -\frac{1}{a\sqrt{V_0}} \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \arcsin \frac{2\varepsilon + 2u}{u\sqrt{\varepsilon + 1}} \right]_{u_0}^u$$

(im folgenden entspricht C der unteren Grenze eingesetzt, mal $-\frac{1}{a\sqrt{V_0}}$!)

$$= -\frac{1}{a\sqrt{\epsilon_0}} \left(\frac{1}{\sqrt{-\epsilon_1}} \operatorname{arcsinh} \frac{2\epsilon + 2e^{-ax}}{e^{-ax}\sqrt{4+4\epsilon_1}} \right) + C = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} (t - t_0)$$

$$= -\frac{1}{a\sqrt{-\epsilon_0}} \left(\operatorname{arcsinh} \frac{2\epsilon + 2e^{-ax}}{e^{-ax}\sqrt{4+4\epsilon_1}} \right) + C = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} (t - t_0)$$

$$\Rightarrow \operatorname{arcsinh} \frac{2\epsilon + 2e^{-ax}}{e^{-ax}\sqrt{4+4\epsilon_1}} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} (t - t_0) \cdot \sqrt{-\epsilon_0} \cdot a + C \cdot a \cdot \sqrt{-\epsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\epsilon + 2e^{-ax}}{e^{-ax}\sqrt{4+4\epsilon_1}} = \sinh \left(a\sqrt{-\epsilon_0} \left(\pm \sqrt{\frac{2}{m}} (t - t_0) + C \cdot a \cdot \sqrt{-\epsilon_0} \right) \right)$$

→ nur der Sinus ist periodisch

$$\Rightarrow 2\pi = \sqrt{-\epsilon_0} \cdot a \left(\pm \sqrt{\frac{2}{m}} \right) \cdot T$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{-\epsilon_0} a} \sqrt{\frac{m}{2}}$$

✓ 5 P

Aufgabe 33: Wegintegrale

allg. für Weg 2: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}, x = \sqrt{1-y^2}$

a) $\vec{F}_1(\vec{r}) = \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\int_{\textcircled{a}} \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} d\vec{r} = \int_0^1 2dy + \int_1^0 1dx = \underline{\underline{1}} \quad \checkmark 7 P$$

$$\begin{aligned} \int_{\textcircled{b}} \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} d\vec{r} &= \int_0^1 2\sqrt{1-x^2} dx + \int_1^0 \sqrt{1-y^2} dy \\ &= \left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsinh(x) \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2} y\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2} \arcsinh(y) \right]_1^0 \\ &= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} \arcsinh(1) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}} \quad \checkmark 7 P \end{aligned}$$

$$\int_{\textcircled{c}} \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} d\vec{r} = \int_0^{-1} 2dy + \int_1^{-1} (-1)dx + \int_{-1}^1 (2)dy + \int_1^0 1dx = \underline{\underline{-3}} \quad \checkmark 7 P$$

allg. zu Weg 2: $\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ (Kugelkoordinaten)

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi$$

$$\int_{\textcircled{2}} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} F_x(\varphi) \\ F_y(\varphi) \\ F_z(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \dots$$

$$b) \vec{F}_2(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \vec{F}_2(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{x^2 + y^2}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt + \int_1^0 \frac{t}{1+t^2} dt = 0 \quad \checkmark 1P$$

$$\int_0^1 \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \int_0^1 \frac{y}{1+y^2} dy + \int_1^0 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+y^2) \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_1^0 = 0 \quad \checkmark 1P$$

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \int_0^{-1} \frac{t}{1+t^2} dt + \int_1^{-1} \frac{t}{1+t^2} dt + \int_{-1}^1 \frac{t}{1+t^2} dt + \int_{-1}^0 \frac{t}{1+t^2} dt = 0 \quad \checkmark 1P$$

$$c) \vec{F}_3(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

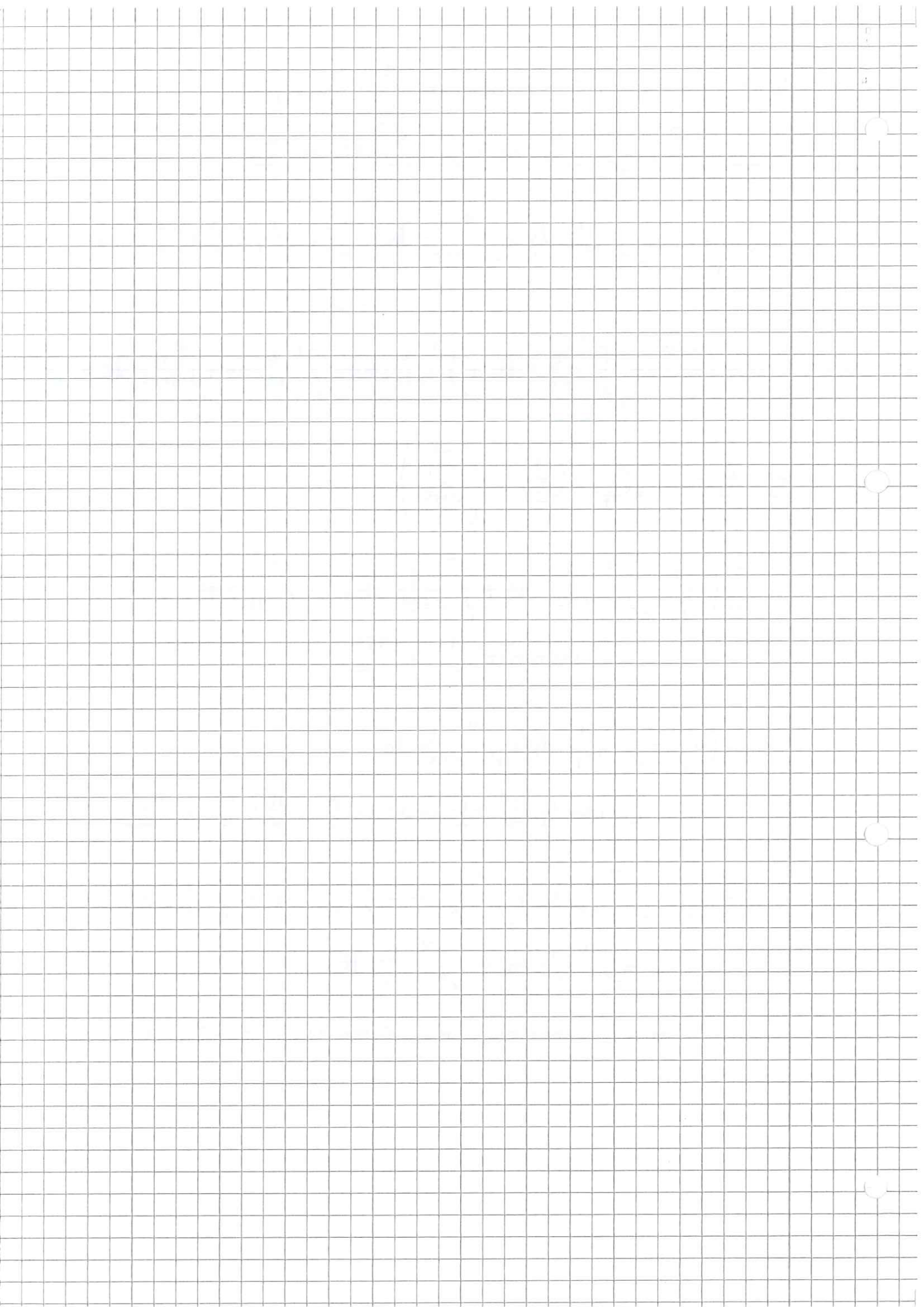
$$\int_0^1 (\dots) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_{-1}^0 \frac{-1}{1+t^2} dt = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [2 \arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{2} \quad \checkmark 1P$$

$$\int_0^1 (\dots) = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy + \int_1^0 \frac{-1}{1+x^2} dx = [\arctan(y)]_0^1 + [-\arctan(x)]_1^0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \checkmark 1P$$

$$\int_0^1 (\dots) = \int_0^{-1} \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2} dt - \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt - \int_{-1}^0 \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \int_0^{-1} \frac{1}{1+t^2} dt + 2 \int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2} dt = 2 [\arctan(t)]_0^{-1} + 2 [\arctan(t)]_1^{-1} = -\frac{3}{2} \pi \quad \checkmark 1P$$

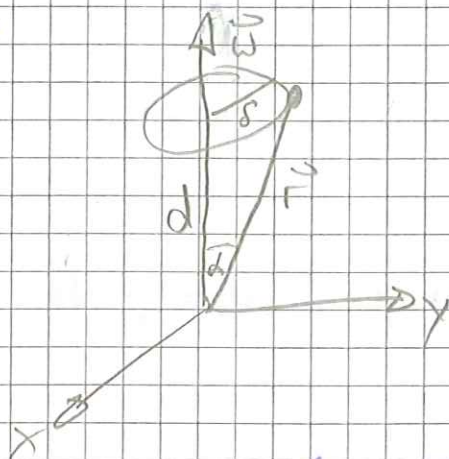
72

20



35) Drehimpuls

•



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi f}{v}, \quad v = \omega \cdot f$$

$$L = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m(r \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \sim \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e}_\varphi = \omega \cdot f \cdot \vec{e}_\varphi$$

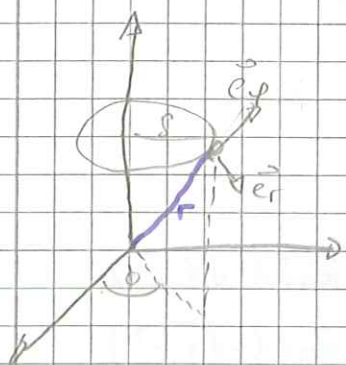
$$L = m \cdot \omega \cdot f (\vec{r} \times \vec{e}_\varphi) = m \cdot \omega \cdot f \cdot r (\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi) = -m \omega f r \vec{e}_\theta$$

$$= -m \omega d \tan \theta \frac{d}{\cos \theta} \vec{e}_\theta$$

$$= -m \omega \frac{d^2 \sin \theta}{\cos^3 \theta} \vec{e}_\theta$$

$$\text{mit } \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

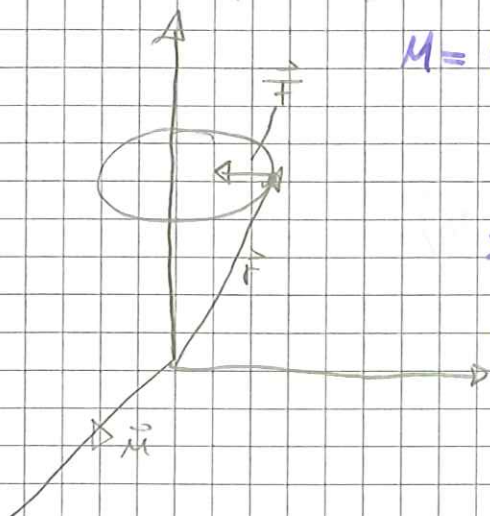
$$\rightarrow \vec{e}_\theta|_{\theta=d} = \begin{pmatrix} \cos d \cos \varphi \\ \cos d \sin \varphi \\ -\sin d \end{pmatrix}$$



$$\dot{L} = -m \omega \frac{d^2 \sin \theta}{\cos^3 \theta} \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos d \cos \varphi \\ \cos d \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= m \omega^2 d^2 \tan \theta \vec{e}_\varphi \quad \text{mit } \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

•



$$M = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}, \quad \dot{\vec{L}} = \vec{M}$$

x- und y-Komponente von M ändern sich, z nicht.

32

$$b) t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}}$$

 x_{u-}, x_{u+} } umkehrpunkte von q

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_{u-}}^{x_{u+}} \frac{dx}{\sqrt{E - V_0(e^{-2ax} - 2e^{-ax})}}$$

$$u = e^{-ax} \rightarrow dx = -\frac{1}{a} \frac{1}{u} du$$

$$\rightarrow \frac{T}{2} = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{m}{2V_0}} \int_{u^-}^{u^+} \frac{1}{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{E}{V_0} - u^2 + 2u}}$$

Subst: $z = \frac{1}{u}, du = -\frac{1}{z^2} dz$

$$= -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{m}{2V_0}} \int_{z^-}^{z^+} \frac{-\frac{1}{z^2} dz}{\sqrt{\frac{E}{V_0} - \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z}}} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{m}{2V_0}} \int_{z^-}^{z^+} \frac{dz}{\sqrt{\frac{E}{V_0} z^2 + 2z - 1}}$$

$$= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{m}{2V_0}} \frac{1}{|E|} \left[\operatorname{arcsinh} \left(\frac{1 - Ez}{\sqrt{1 - E}} \right) \right]_{z^-}^{z^+}$$

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{m}{2(-E)}} \left[\operatorname{arcsinh} \frac{1 - E e^{ax}}{\sqrt{1 - E}} \right]_{x^-}^{x^+}$$

$$x_{u-} = -\frac{1}{a} \ln(1 - \sqrt{1 - E})$$

$$x_{u+} = -\frac{1}{a} \ln(1 + \sqrt{1 - E})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{m}{2(-E)}} \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{1 - \frac{E}{1 + \sqrt{1 - E}}}{\sqrt{1 - E}} \right) - \operatorname{arcsinh} \left(\frac{1 - \frac{E}{1 - \sqrt{1 - E}}}{\sqrt{1 - E}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - E}} \frac{1 + \sqrt{1 - E} - E}{1 + \sqrt{1 - E}} = \frac{(1 - E) - \sqrt{1 - E}}{\sqrt{1 - E} + (1 - E)} = -1 \\ &= \frac{\sqrt{1 - E} + (1 - E)}{\sqrt{1 - E} + (1 - E)} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{m}{2(-E)}} (\operatorname{arcsinh} 1 - \operatorname{arcsinh}(-1))$$

$$= \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{m}{2(-E)}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{m}{2(-E)}}$$

(34)

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\int_C \vec{F} d\vec{r}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot r \rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\varphi} = r \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ einsetzen} \rightarrow d\vec{r} = r \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi = r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = \underline{2\pi r^2}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{n}$ = Normalenvektor
der Fläche

$$\Rightarrow \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} d\vec{A} = \int_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} d\vec{A}, \quad d\vec{A} = dA \cdot \vec{n}$$

$$= \int_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \cdot dA = \int_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA$$

$$= 2 \int_S dA = \underline{2\pi r^2}$$

Gesamtfläche des Kreises = πr^2

