Theoretische Physik A

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila
www-ttp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/Uebungen

WS 07/08 – Blatt 12
Abgabe: 22.01.2008
Besprechung: 25.01.2008

Aufgabe 40 : Fortsetzung von Aufgabe 39, Blatt 11

Lösen Sie die Bewegungsgleichungen des Pendels der Aufgabe 39

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\Omega^2 x + 2\alpha\dot{y}\,,\\ \ddot{y} &= -\Omega^2 y - 2\alpha\dot{x}\,,\end{aligned}$$

mit $\Omega = \sqrt{g/L}$, $\alpha = \omega\cos\theta$ und die Anfangsbedingungen $x(0) = 0\,, \dot{x}(0) = 0\,, y(0) = A\,, \dot{y}(0) = 0$. Betrachten Sie dazu $\Omega \gg \alpha$.

Hinweis: Es ist zweckmäßig die Bewegung in der (x, y)-Ebene durch die komplexe Koordinate $u = x + iy$ zu beschreiben.

(*) Aufgabe 41 (20P) : Angetriebener harmonischer Oszillator

(a) Der mit der Kraft $F(t)$ angetriebene, gedämpfte harmonische Oszillator wird durch die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \rho\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)\,, \quad \mathrm{mit}\, f(t) = \frac{F(t)}{m} \tag{1}$$

beschrieben. Dabei bezeichnet m die Masse, ρ die Dämpfungskonstante und $2\pi/\omega_0$ die Schwingungsdauer des Oszillators. Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) für $f(t) = f_0 e^{i\omega t}$ mit $f_0, \omega \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Verwenden Sie einen Ansatz vom Typ $x = x_0\, e^{i\omega t}$, mit $x_0 = |x_0|\, e^{i\delta}$, um eine partikuläre Lösung zu bestimmen.

(b) (i) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz, bei der die Amplitude des Oszillators im stationären Zustand ein Maximum erreicht. (ii) Geben Sie die maximale Amplitude an.

(c) Stellen Sie die Amplitude des Oszillators nach dem Einschwingvorgang als Funktion von ω^2 graphisch dar.

(d) Stellen Sie die Lösung der Differentialgleichung (1) für den Fall, dass keine Dämpfung vorhanden ist und die Frequenz der erregenden Kraft mit der Eigenfrequenz des Oszillators übereinstimmt, auf. Skizzieren Sie die Lösung.

Aufgabe 42 : Differentialgleichungen

Lösen Sie die Differentialgleichungen:

$$\text{(a)}\quad \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2} - 4\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - 5y = x^2 + 2e^{3x}\,,$$

$$\text{(b)}\quad \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2} + 10\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + 25y = 20\cos 2x\,.$$

25.1.08 TheoTut

Aufgabe 40

$$\ddot{x} = -\Omega^2 x + 2\alpha \dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\Omega^2 y + 2\alpha \dot{x}$$

$$u = x + iy \rightarrow \dot{u} = \dot{x} + i\dot{y} \rightarrow \ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y}$$

$$\ddot{u} = -\Omega^2 x + 2\alpha\dot{y} + i(-\Omega^2 y + 2\alpha\dot{x})$$

$$= -\Omega^2 \underbrace{(x+iy)}_{u} - 2\alpha \frac{1}{i} \underbrace{(\dot{x} + i\dot{y})}_{\dot{u}}$$

$$\Rightarrow \ddot{u} = -\Omega^2 u + i\, 2\alpha \dot{u}$$

Ansatz: $u = c \cdot e^{i\lambda t}$

$$\dot{u} = ic\lambda e^{i\lambda t}$$

$$\ddot{u} = -c\lambda^2 e^{i\lambda t}$$

$$\rightarrow -\Omega^2 \cancel{c} \cancel{e^{i\lambda t}} - i 2\alpha \cancel{c} i \cancel{e^{i\lambda t}} + \cancel{c}\lambda^2 \cancel{e^{i\lambda t}} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \Omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \Omega^2} = -\alpha \pm K$$

$$u = c_1 e^{-i(-\alpha+K)t} + c_2 e^{-i(-\alpha-K)t}$$

$$= (c_1 + i c_2) e^{-i(\alpha+K)t} + (d_1 + i d_2) e^{-i(\alpha-K)t}$$

$$= (c_1 + i c_2)(\cos(\alpha+K)t - i \sin(\alpha+K)t)$$

$$+ (d_1 + i d_2)(\cos(\alpha+K)t - i \sin(\alpha+K)t)$$

$$u = \overbrace{d_1 \cos(\alpha-K)t + d_2 \sin(\alpha-K)t + c_1 \cos(\alpha+K)t + c_2 \sin(\alpha+K)t}^{Re(u) = x}$$

$$+ i\underbrace{(-d_1 \sin(\alpha-K)t + d_2 \cos(\alpha-K)t - c_1 \sin(\alpha+K)t + c_2 \cos(\alpha+K)t)}_{Im(u) = y}$$

$$x(0) = d_1 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -d_1$$

$$\dot{x}(0) = (\alpha - K) d_2 + (\alpha + K) c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{\alpha - K}{\alpha + K} d_2$$

$y(0) = c_2 + d_2 = A$

$d_2 - \frac{\lambda - K}{\lambda + K} d_2 = A \quad \Rightarrow d_2 = \frac{A}{1 - \frac{\lambda - K}{\lambda + K}} = A$

$\frac{\lambda + K}{2K} = \frac{A}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{K}\right)$

$c_2 = -\frac{\lambda - K}{\lambda + K} \frac{-A}{\frac{\lambda + K}{\lambda - K} - 1} = -A \frac{\lambda - K}{2K} = \frac{A}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{K}\right)$

$\Omega \gg \lambda: \quad \frac{\lambda}{K} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \Omega^2}} \to 0 \Rightarrow d_2 = c_2 = \frac{A}{2}$

$\dot{y}(0) = -d_1(\lambda - K) - \underbrace{c_1}_{= -d_1}(\lambda + K) = \cancel{-d_1 \lambda} + d_1 K + \cancel{d_1 \lambda} + d_1 K = 0$

$\Rightarrow 2 d_1 K = 0 \Rightarrow d_1 = c_1 = 0$

$\Rightarrow x(t) = \frac{A}{2} \sin(\lambda - K)t + \frac{A}{2} \sin(\lambda + K)t$

$y(t) = \frac{A}{2} \cos(\lambda - K)t + \frac{A}{2} \cos(\lambda + K)t$

(Additionstheorem:) $x(t) = \frac{A}{2}(\sin\lambda t \cos Kt - \cos Kt \sin Kt) + \frac{A}{2}(\sin\lambda t \cos Kt + \cos\lambda t \sin Kt)$

$= A \sin\lambda t \cos Kt$

$K = \sqrt{\lambda^2 + \Omega^2} \Rightarrow K \to \Omega$, da $\Omega \gg \lambda$

$\Rightarrow x(t) = A \sin\lambda t \cos \Omega t$

$y(t) = A \cos\lambda t \cos \Omega t$

Aufgabe 42:

a) $y'' - 4y' - 5y = x^2 + 2e^{3x}$

$y'' - 4y' - 5y = 0$

→ Ansatz $y_h = a e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3$

$\Rightarrow y_h = a_1 e^{5x} + a_2 e^{-x}$

$y_p = Ax^2 + Bx + C + De^{3x}$ ← partikulärer Ansatz

$y' = 2Ax + B + 3De^{3x}$

$y'' = 2A + 9De^{3x}$

$2A + 9De^{3x} - 4(2Ax + B + 3De^{3x}) - 5(Ax^2 + Bx + C + De^{3x}) = x^2 + 2e^{3x}$

$\Leftrightarrow x^2(-5A) + e^{3x}(9D - 12D - 5D) + x(-8A - 5B) + (2A - 4B - 5C) = x^2 + 2e^{3x}$

Koeffizientenvgl.

$(-8D) = 2 \Rightarrow D = -\frac{1}{4}$

$(-5A) = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{5}$

$(-8A - 5B) = (-\frac{8}{5} - 5B) = 0 \Rightarrow B = \frac{8}{25}$

$(2A - 4B + 5c) = (-\frac{2}{5} - \frac{32}{25} - 5c) = 0 \Rightarrow C = -\frac{42}{125}$

$\Rightarrow y = y_h + y_p = a_1 e^{5x} + a_2 e^{-x} - \frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{25}x - \frac{42}{125} - \frac{1}{4}e^{3x}$

b) $y'' + 10y' + 25y = 20\cos 2x$

homogener Ansatz $y'' + 10y' + 25y = 0$

$y_h = ce^{\lambda x}$ → einsetzen ergibt nur eine Lsg für λ ⇒ neuer Ansatz nötig!

$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -5$

neuer Ansatz: $c(x)e^{\lambda x} = y_h = c(x)e^{-5x}$

$\Rightarrow y_h' = c'e^{-5x} - 5ce^{-5x}$

$y_h'' = c''e^{-5x} - 2\cdot 5c'e^{-5x} + c25e^{-5x}$

$\Rightarrow (c''e^{-5x} - 10c'e^{-5x} + c25e^{-5x}) + 10(c'e^{-5x} - 5ce^{-5x}) + 25(ce^{-5x}) = 0$

$c'' = 0 \Rightarrow c = a_1 x + a_2$

$\Rightarrow y_h = (a_1 x + a_2)e^{-5x}$

partikulärer Ansatz: $y'' + 10y' + 25y = 20\cos 2x$

$y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$

$y_p' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$

$y_p'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$

$\Rightarrow (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) + 10(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + 25(A\cos 2x + B\sin 2x) = 20\cos 2x$

$\Leftrightarrow (20B - 4A + 25A)\cos 2x + (25B - 4B - 20A)\sin 2x = 20\cos 2x$

$\Rightarrow 20B + 21A = 20$

$21B - 20A = 0 \Rightarrow 21B = 20A \Rightarrow B = \frac{20}{21}A$

$\Rightarrow 20 \cdot \frac{20}{21}A + 21A = 20 \Rightarrow A = \frac{420}{841} \Rightarrow B = \frac{400}{841}$

$\Rightarrow y = (a_1 x + a_2)e^{-5x} + \frac{420}{841}\cos 2x + \frac{400}{841}\sin 2x$

Theo A

Blatt Nr. 12

Heitz, Stefan 1421950
Tutoriumgruppe 12
Tutor: Marius Kist

Aufgabe 41: Angetriebener H.O.

a) $\ddot{x} + p\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$

$f(t) = f_0 e^{i\omega t}$ ✓ 0,5

Ansatz: $x = x_0 e^{i\omega t} \rightarrow \dot{x} = i\omega x_0 e^{i\omega t} \rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$

$\Rightarrow -\omega^2 x_0 \cancel{e^{i\omega t}} + pi\omega x_0 \cancel{e^{i\omega t}} + \omega_0^2 x_0 \cancel{e^{i\omega t}} = f_0 \cancel{e^{i\omega t}}$

$\Rightarrow -\omega^2 x_0 + p\omega x_0 i + \omega_0^2 x_0 = f_0$

$\Rightarrow x_0 = \frac{f_0}{-\omega^2 + ip\omega + \omega_0^2} = |x_0| e^{i\delta}$ ✓ 1P

$|x_0| = ?$

$$x_0 = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + ip\omega} = \frac{f_0((\omega_0^2 - \omega^2) - ip\omega)}{((\omega_0^2 - \omega^2) + ip\omega)((\omega_0^2 - \omega^2) - ip\omega)}$$

$$= \frac{f_0((\omega_0^2 - \omega^2) - ip\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}$$

$$\rightarrow |x_0| = \sqrt{x_0 \cdot \bar{x}_0} = \sqrt{\left[\frac{f_0((\omega_0^2 - \omega^2) + ip\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + p^2\omega^2}\right] \cdot \left[\frac{f_0((\omega_0^2 - \omega^2) - ip\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + p^2\omega^2}\right]}$$

$$|x_0| = f_0 \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}}$$ ✓ 1P

$$x_0 = |x_0| e^{i\delta} = \frac{f_0 e^{i\delta}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}}$$

$$\delta = \text{Arctan} \frac{\text{Im} x_0}{\text{Re} x_0} = \text{Arctan} \frac{p\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$ ✓ 1P

$$\Rightarrow x_p(t) = |x_0| e^{i(\omega t + \delta)}$$

allg. Lösung: $x(t) = x_a + x_p$

$x_a = ?$

Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$ ✓ 1P

$\Rightarrow \lambda^2 + p\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - \omega_0^2}$ ✓ 1P

Fallunterscheidung:

a) $\omega_0 > \frac{p}{2}$: $\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\Omega$ mit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{p^2}{4}}$

$\Rightarrow x_{1,2} = e^{-\frac{p}{2}t} e^{\pm i\Omega t}$

$\Rightarrow x(t) = A e^{-\frac{p}{2}t} \cos(\Omega t) + B e^{-\frac{p}{2}t} \sin(\Omega t)$ ✓ 0,5

b) $\omega_0 < \frac{p}{2}$: $\Rightarrow x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$ mit $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - \omega_0^2}$ ✓ 0,5

c) $\omega_0 = \frac{p}{2}$: $\Rightarrow x(t) = A e^{-\frac{p}{2}t} + Bt e^{-\frac{p}{2}t}$ ✓ 0,5

$$\Rightarrow x = \begin{cases} A e^{-\frac{p}{2}t} \sin(\Omega t) + B e^{-\frac{p}{2}t} \cos(\Omega t) + |x_0| e^{i(\omega t + \delta)} & \omega_0 > \frac{p}{2},\ \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{p^2}{4}} \\ A e^{\lambda_1} + B e^{\lambda_2} + |x_0| e^{i(\omega t+\delta)} & \omega_0 < \frac{p}{2},\ \lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - \omega_0^2} \\ A e^{-\frac{p}{2}t} + Bt e^{-\frac{p}{2}t} + |x_0| e^{i(\omega t + \delta)} & \omega_0 = \frac{p}{2} \end{cases}$$ ✓ 1P

b) (i) Resonanzfrequenz

$x_0 = |x_0| e^{i(\omega t + \delta)}$

$|x_0| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}}$ (Min von Nenner $\hat{=}$ Max von $|x_0|$!)

$g(\omega) := (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + p^2\omega^2$

$g'(\omega) = 2 \cdot 2\omega(\omega^2 - \omega_0^2) + 2\omega p^2 = 4\omega^3 - 4\omega\omega_0^2 + 2p^2\omega$

$g'(\omega) \stackrel{!}{=} 0$

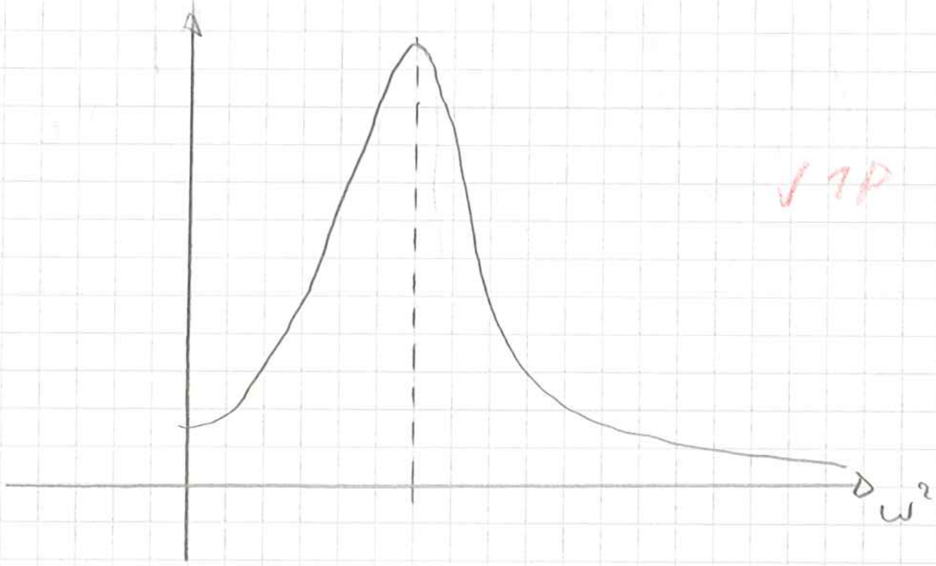
$\Rightarrow \omega_1 = 0$ (keine Lsg)

$\omega_{2,3} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 0{,}5\,p^2}$ ✓ 2P

(ii) $|x_0| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - 0{,}5p^2 - \omega_0^2)^2 + p^2(\omega_0^2 - 0{,}5p^2)}} = \frac{f_0}{\sqrt{p^2\omega_0^2 - 0{,}25p^4}}$ ✓ 1P

$\omega_{2,3} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 0{,}5p^2}$ in $|x_0|$ eingesetzt.

c)



✓ 1P

d) $\ddot{x} + p\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$

keine Dämpfung, d.h. $p = 0$

Frequenz = Eigenfrequenz, d.h. $\omega = \omega_0$

$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$

Ansatz: $x_p(t) = dte^{i\omega_0 t}$ ✓ 1P

$\dot{x} = de^{i\omega_0 t} + (dti\omega_0)e^{i\omega_0 t}$

$\ddot{x} = di\omega_0 e^{i\omega_0 t} + di\omega_0 e^{i\omega_0 t} + dti\omega_0 e^{i\omega_0 t} i\omega_0$

$= e^{i\omega_0 t}(2di\omega_0 - dt\omega_0^2)$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega_0 t}$ ✓ 1P

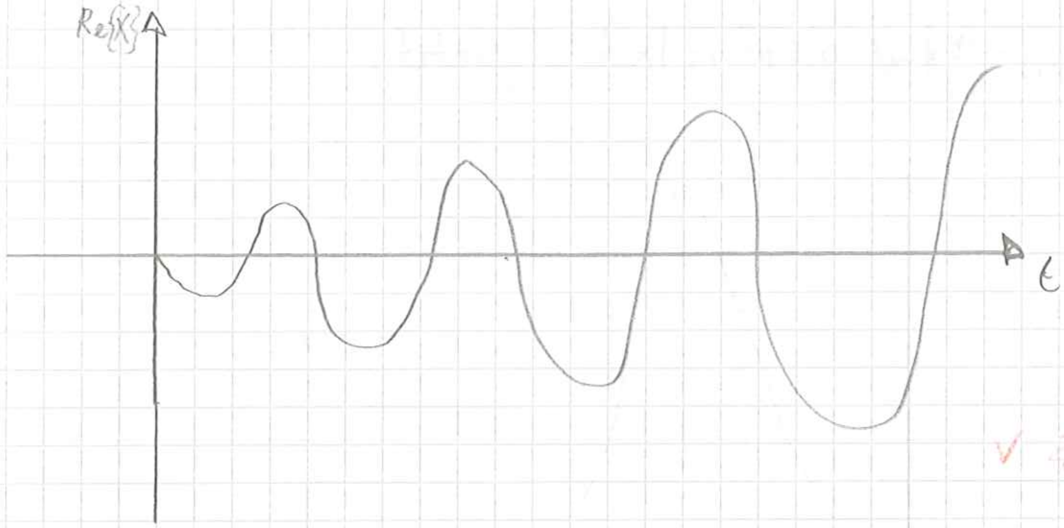
$\cancel{e^{i\omega_0 t}}(2di\omega_0 - dt\omega_0^2) + \omega_0^2 dt \cancel{e^{i\omega_0 t}} = f_0 \cancel{e^{i\omega_0 t}}$

$\Rightarrow 2di\omega_0 - \cancel{dt\omega_0^2} + \cancel{dt\omega_0^2} = f_0$

$\Rightarrow d = \frac{f_0}{2i\omega_0}$ ✓ 1P

$\Rightarrow x_p(t) = \frac{f_0 t}{2\omega_0 i} e^{i\omega_0 t}$ 2P

$$\Rightarrow x = x_a + x_p = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t) + \frac{t f_0}{2\omega_0 i} e^{i\omega_0 t}$$ ✓ 2P



✓ 2P

2.0