Theoretische Physik A

Institut für Theoretische Teilchenphysik

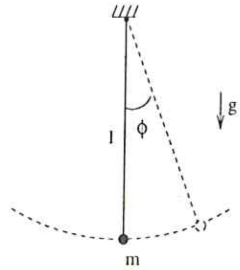
Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila
www-ttp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/Uebungen

WS 07/08 – Blatt 13
Abgabe: 29.01.2008
Besprechung: 01.02.2008

(*) Aufgabe 43 (20P) : Mathematisches Pendel

Die Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels lautet

$$ml\ddot{\phi} + mg\sin\phi = 0\,. \tag{1}$$



(a) Zeigen Sie, dass man für den Grenzfall kleiner Auslenkungen die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators erhält und bestimmen Sie die dazugehörige Schwingungsdauer T_0.

Hinweis: Entwickeln Sie die Funktion $\sin\phi$ zur führenden Ordnung in eine Taylorreihe um den Punkt $\phi = 0$ (d.h. um die Ruhelage). Eine Taylorreihe um $x = x_0$ ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i\,!}(x-x_0)^i + \mathcal{O}((x-x_0)^{n+1})\,,$$ wobei $f^{(i)}$ die i-te Ableitung der Funktion f bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass der allgemeine Ausdruck für die Schwingungsdauer T des mathematischen Pendels von Gl. (1) lautet

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\phi_0}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}}\,, \tag{2}$$

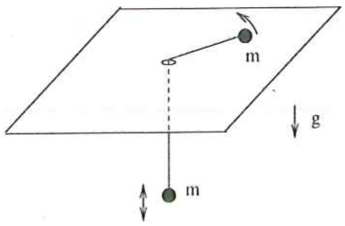
wobei ϕ_0 die Maximalauslenkung bezeichnet.
Hinweis: Verwenden Sie dazu die Aufgabe 29(b) von Blatt09.
(c) Leiten Sie folgende äquivalente Form der Gleichung (2) her:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-k^2\sin x^2}}\,,\quad k = \sin\frac{\phi_0}{2}\,. \tag{3}$$

Gehen Sie dabei folgendermaßen vor: Ersetzen Sie $\cos\phi$ mit Hilfe von der Relation $\cos\phi = 1 - 2\sin^2(\phi/2)$ und führen Sie danach die Variablentransformation $\sin\frac{\phi}{2} = \sin\frac{\phi_0}{2}\sin x$ aus.
(d) Bestimmen Sie die Schwingungsdauer für den Grenzfall $\phi_0 \to \pm\pi$.
(e) Bestimmen Sie die Abweichung der Schwingungsdauer des Pendels von der des harmonischen Oszillators T_0. Entwickeln dazu Sie den Integranden von Gl. (3) für $k \ll 1$ bis zur Ordnung k^2.
(f) Bestimmen Sie die zur im Teil (e) berechnete Schwingungsdauer gehörige Lösung $\phi(t)$ für die Anfangsbedingung $\phi(0) = \phi_0$. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:
(i) Entwickeln Sie in Gl. (1) $\sin\phi$ bis $\mathcal{O}(\phi^3)$.
(ii) Machen Sie den Ansatz für $\phi(t)$: $\phi(t) = \phi^{(1)} + \phi^{(2)}$ mit $\phi^{(1)} \gg \phi^{(2)}$ und $\phi^{(1)} = \phi_0\cos\omega\,t$.
(iii) Setzen Sie $\phi(t)$ und $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$ aus Teil (e) mit $\omega_0 = 2\pi/T_0$ in Gl. (1) ein. Dabei sollen Terme der Ordnung $(\phi^{(2)})^3$ und $(\phi_0)^n$ mit $n > 3$ vernachlässigt werden.
(iv) Lösen Sie die Differentialgleichung für $\phi^{(2)}$.
Hinweis: Ersetzen Sie $\cos^3 x$ mit Hilfe von der Relation $\cos^3 x = (3\cos x + \cos 3x)/4$.

Aufgabe 44 : Gekoppelte Kugeln

Zwei Massenpunkte der Masse m seien mit einer Schnur der Länge l miteinander verbunden (vgl. Skizze). Einer der Massenpunkte gleitet reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene, der andere kann unter dem Einfluß der Schwerekraft eine vertikale Bewegung ausführen. Benutzen Sie zur Beschreibung des Systems ebene Polarkoordinaten (r, ϕ), wobei der Ursprung auf dem Loch sitzt, durch das die Schnur verläuft.



(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems auf. Welche Bewegungsgleichung können Sie sofort integrieren? Welcher Erhaltungssatz steckt dahinter?
(b) Zeigen Sie, dass sich der obere Massenpunkt auf Kreisbahnen bewegen kann. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit des oberen Massenpunktes in Abhängigkeit vom Kreisradius.
(c) Zeigen Sie, dass die Bewegung des oberen Massenpunktes auf einer Kreisbahn stabil verläuft. Benutzen Sie dazu den Ansatz $r(t) = r_0 + \rho(t)$, wobei $\rho(t)$ eine kleine Störung der Kreisbahn mit Radius $r(t) = r_0$ darstellt ($\rho(t) \ll r_0$) und drücken Sie die Winkelgeschwindigkeit des oberen Massenpunktes durch seinem Drehimpuls bzgl. des Ursprungs aus. Entwickeln Sie nun die Bewegungsgleichung für $r(t)$ für kleine $\rho(t)$ und zeigen Sie, dass die Störung zu harmonischen Schwingungen um die Kreisbahn führt. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer des Systems als Funktion von Kreisradius und Erdbeschleunigung.

Aufgabe 45 : Deltafunktion

(a) Zeigen Sie, dass folgende Relationen für die Deltafunktion $\delta(x)$ gültig sind:

$$\text{(i)}\ \delta(-x) = \delta(x)\,, \quad \text{(ii)}\ x\delta(x) = 0\,, \quad \text{(iii)}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x) = \delta(x)\,,\ \theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}\,,$$

$$\text{(iv)}\ \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\,, \quad \text{(v)}\ \delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}(\delta(x-a) + \delta(x+a))\,,$$

$$\text{(vi)}\ \delta(f(x)) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|} \quad \text{mit} \quad f'(x_n) = \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_n}\,,$$

wobei f in (vi) nur einfache Nullstellen $n = 1, 2. \dots, N$ hat, d.h. $f(x_n) = 0\,, f'(x_n) \neq 0$.

Hinweis: Multiplizieren Sie mit einer Testfunktion, integrieren Sie von $-\infty$ bis $-\infty$ und berücksichtigen Sie die Definition der Deltafunktion.

(b) Gegeben Sei die Funktion

$$f_\epsilon(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \delta_\epsilon(t - t_0)\, f(t)\,, \quad \text{mit} \quad \delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + t^2}\,.$$

Führen Sie für $f(t) = at + b$ die Integration explizit aus. Betrachten Sie nun den Limes $\epsilon \to 0$.

Theo A
Blatt 13

Heite, Stefan 1421950
Tutoriumgruppe 12
Tutor: Marius Kist

Aufgabe 43: Mathematisches Pendel

Bew.gl: $ml\ddot{\phi} + mg\sin\phi = 0$

a) $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \mathcal{O}((x-x_0)^{n+1})$

$\Rightarrow f(x) = \sin\phi$ um $\phi = 0$ entwickeln ergibt

$\sin\phi = \phi + \mathcal{O}(\phi^3)$

$\Rightarrow ml\ddot{\phi} + mg\phi = 0$ ✓ 0,5

$\Leftrightarrow \ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0$

Ansatz: $\phi = A\sin\omega t \to \dot{\phi} = A\omega\cos\omega t \to \ddot{\phi} = -\omega^2 A\sin\omega t$

$\Rightarrow -\omega^2 A\sin\omega t + \frac{g}{l}A\sin\omega t = 0$

$\omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ✓ 0,5

b) z.z. $T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}}$

Blatt 9, A29b)

$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{E - V(x)}}$

$F = -m\frac{g}{l}\sin\phi = m\ddot{\phi}$

$\Rightarrow V(\phi) = -\int_{\phi_0}^{\phi} -F\,d\phi = \left[-\frac{mg}{l}\cos\phi\right]_{\phi_0}^{\phi} = -\frac{mg}{l}(\cos\phi - \cos\phi_0) + E$

$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{mg}{l}(\cos\phi - \cos\phi_0)}} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}}$

Das kannst du machen weil bei dir $E = 0$ weil du den Nullpunkt des Potentials in die Energie der maximalen Auslenkung gelegt hast, $V(\phi_0) = 0$. Aber das würde ich gern von dir erfahren wenn ich die Aufgabe durchlese

Zeit bis ϕ_0 entspricht $\frac{1}{4}$ Periode

$\Rightarrow T = 4 \cdot \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}}$

c) z.z. $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$ mit $k = \sin\frac{\phi_0}{2}$

(2) $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}}$

$\Rightarrow \cos\phi = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \rightarrow$ Variablentransformation $\sin\frac{\phi}{2} = \sin\frac{\phi_0}{2}\sin x$

$\frac{d\phi}{dx} = \frac{2k\cos x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$ mit $k = \sin\frac{\phi_0}{2}$ ✓ 1P

$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2k\cos x\, dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\sqrt{-2k^2\sin^2 x + 2k^2}}$

$= 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2k\cos x\, dx}{\sqrt{2k^2}\sqrt{\cos^2 x}\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$

$= 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cancel{k}\cos x\, dx}{\sqrt{2}\,\cancel{k}\cos x\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$

$= 4\sqrt{\frac{2l}{2g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$

$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$ ✓ 1P

d) $\lim_{\phi_0 \to \pm\pi} 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$, $\phi_0 \to \pm\pi \Rightarrow k \to 1$

$\Rightarrow \lim_{\phi_0 \to \pm\pi} 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \lim_{\phi_0 \to \pm\pi} 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$

✓ 1P

$= \lim_{\phi_0 \to \pm\pi} 4\sqrt{\frac{l}{g}} \left[\ln\tan\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{\phi_0 \to \pm\pi} 4\sqrt{\frac{l}{g}} \ln\frac{\tan\frac{\pi}{2}}{\tan\frac{\pi}{4}} = \infty$ ✓ 1P

Erklärung: Pendel ist an Stab befestigt und bei Auslenkung um π verharrt das Pendel im Hochpunkt.

e) $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$

$= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+0+\frac{1}{2}k^2\sin^2 x)\,dx + \mathcal{O}(k^3)$ (Taylorentwicklung) ✓ 1P

$= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\frac{1}{2}k^2\sin^2 x)\,dx + \mathcal{O}(k^3)$

$= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \left[x+\frac{1}{2}k^2(-\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x)+\frac{1}{2}x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \mathcal{O}(k^3)$ ✓ 1P

$= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \left((\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}k^2(-\frac{1}{2}\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0}\sin(\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}\frac{\pi}{2})) - (0+\frac{1}{2}k^2(-\frac{1}{2}\cos(0)\underbrace{\sin(0)}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{2}0}_{=0}))\right) + \mathcal{O}(k^3)$

$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k^2\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{l}{g}}\left(2\pi+\frac{k^2\pi}{2}\right) + \mathcal{O}(k^3)$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{k^2}{4}\right) + \mathcal{O}(k^3)$ ✓ 1P

$\Rightarrow$ Die Abweichung beträgt $\left(1+\frac{k^2}{4}\right) + \mathcal{O}(k^3)$

$T = T_0 + \underbrace{T_0 \frac{k^2}{4}}_{= \text{Abweichung}}$

5

1.2.08 Theo Tut

Aufgabe 43

a) $m\ell\ddot{\phi} + mg\sin\phi = 0$

$\sin(x) = \sin(x_0) + \frac{\cos(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{-\sin(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{-\cos(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$

$x_0 = 0 \Rightarrow$ ~~...~~ $\sin x = x - \frac{x^3}{6}$

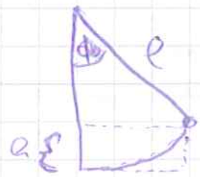
$\sin\phi = \phi - \underbrace{\frac{\phi^3}{6}}_{=0} \Rightarrow \sin\phi \approx \phi$

$\Rightarrow$ H.O. $\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell}\phi = 0$ mit $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

b) $\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{m}{2}}\,\ell \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{E-V}}$ Bogenlänge $dx = \ell\, d\phi$

$V(\phi) = mgh$



$\Rightarrow h = \ell(1-\cos\phi)$

$\Rightarrow V(\phi) = mg\ell(1-\cos\phi)$

$E = mg\ell(1-\cos\phi_0)$

$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{m}{2}}\,\ell \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{mg\ell(1-\cos\phi_0 - 1 + \cos\phi)}} = 4\sqrt{\frac{m}{2}}\,\ell \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{mg\ell(\cos\phi - \cos\phi_0)}}$

c) $T = \underbrace{4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}}_{=:\lambda} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}}$

$= \lambda \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\phi}{2} - \cos\phi_0}}$

Subst.: $\sin\frac{\phi}{2} = \sin\frac{\phi_0}{2}\sin x$

$\phi = 2\arcsin\left(\sin\frac{\phi_0}{2}\sin x\right)$

$\frac{d\phi}{dx} = \frac{2\sin\frac{\phi_0}{2}\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\phi_0}{2}\sin^2 x}}$

$= \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\frac{\phi_0}{2}\cos x}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\phi_0}{2}\sin^2 x}} \cdot \frac{1\cdot dx}{\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\phi_0}{2}\sin^2 x - 1 + 2\sin^2\frac{\phi_0}{2}}}$

$= \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cancel{\sin\frac{\phi_0}{2}}\cancel{\cos x}}{\sqrt{(1-\sin^2\frac{\phi_0}{2}\sin^2 x)\,2\cancel{\sin^2\frac{\phi_0}{2}}(\cancel{1-\sin^2 x})}} = \lambda\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$, $k = \sin\frac{\phi_0}{2}$

d) $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$

$\phi_0 = \pm\pi \Rightarrow k = \sin\frac{\phi_0}{2} = \pm 1 \Rightarrow k^2 = 1$

$\Rightarrow T = \underbrace{4\sqrt{\frac{l}{g}}}_{=:\lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} = 2\lambda \underbrace{\left[\ln(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}) - \ln(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=:\mu}$

$\mu(0) = \ln 1 - \ln 1 = 0$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \mu(x) \Rightarrow \ln(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}) - \ln(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}) \sim -\ln 0$

$\Rightarrow \mu(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \infty$

e) $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+(-k^2\sin^2 x)}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+y}} = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{5}{16}y^3 \ldots$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}}_{} = 1 - \frac{1}{2}(-k^2\sin^2 x) + \underbrace{\frac{3}{2}(-k^2\sin x)^2 \ldots}_{=0} \ldots$

$= 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2 x$

$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\frac{1}{2}k^2\sin^2 x)\,dx = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left[[x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{k^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx\right]$

$= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\pi}{2} + 4\sqrt{\frac{l}{g}}\, k^2 \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{l}{g}}\, k^2 \frac{\pi}{2}$

$= \underbrace{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}_{=T_0}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right)$

$\Rightarrow$ Abweichung $= T_0 \frac{k^2}{4}$

$T = T_0\left(1+\frac{k^2}{4}\right)$

$k \ll 1 \Rightarrow \frac{\phi_0}{2} \ll \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{\phi_0}{2} \approx \frac{\phi_0}{2}$

$T = T_0\left(1+\frac{\phi_0^2}{16}\right) \Rightarrow \omega = \omega_0 \frac{1}{1+\frac{\phi_0^2}{16}}$ (Taylorreihe) $\Rightarrow \omega = \omega_0\left(1 - \frac{\phi_0^2}{16} + O(\phi_0^4)\right)$

g) (i) $\sin\phi = \phi - \frac{\phi^3}{6}$, $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$ mit $\omega^{(1)} = -\omega_0 \frac{\phi_0^2}{16}$

$m l \ddot{\phi} + mg \sin\phi = 0$

$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\left(\phi - \frac{\phi^3}{6}\right) = 0$

(ii) Ansatz: $\phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)}$

$\phi^{(1)} = \phi_0 \cos\omega t \rightarrow \ddot{\phi}^{(1)} = -\omega^2 \phi_0 \cos\omega t = -\omega^2 \phi^{(1)}$

$\phi^{(2)} \ll \phi^{(1)}$

(iii) $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$, $\omega = \omega_0 - \omega_0 \frac{\phi_0^2}{16}$ da $\omega^{(1)} = -\omega_0 \frac{\phi_0^2}{16}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\left(\phi - \frac{\phi^3}{6}\right) = 0$

$\phi^{(1)} \gg \phi^{(2)}$

$$\ddot{\phi}^{(1)} + \ddot{\phi}^{(2)} + \omega_0^2 \phi^{(2)} + \omega_0^2 \phi^{(1)} - \left(\frac{\omega_0^2}{6}\left(\cancel{(\phi^{(2)})^3} + \underbrace{3(\phi^{(2)})^2\phi^{(1)} + 3(\phi^{(1)})^2\phi^{(2)}}_{=0\text{ (Erklärung unverständlich)}} + (\phi^{(1)})^3\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\omega^2\phi^{(1)} + \ddot{\phi}^{(2)} + \omega_0^2\phi^{(2)} + \omega_0^2\phi^{(1)} - \frac{\omega_0^2}{6}(\phi^{(1)})^3 = 0$$

$$\ddot{\phi}^{(2)} + \omega_0^2\phi^{(2)} = \underbrace{(\omega^2 - \omega_0^2)}_{\cancel{\omega_0^2} + 2\omega_0 \frac{-\omega_0\phi_0^2}{16} + \left(\frac{\omega_0\phi_0^2}{16}\right)^2 - \cancel{\omega_0^2}}\phi^{(1)} + \frac{\omega_0^2}{6}(\phi^{(1)})^3$$

$$\ddot{\phi}^{(2)} + \omega_0^2\phi^{(2)} = -2\omega_0^2\frac{\phi_0^2}{16}\phi^{(1)} - \cancel{\frac{\phi_0^4\omega_0^2}{16^2}\phi^{(1)}} + \frac{\omega_0^2}{6}(\phi^{(1)})^3$$

$$\ddot{\phi}^{(2)} + \omega_0^2\phi^{(2)} = -2\omega_0^2\frac{\phi_0^2}{16}\phi_0\cos\omega t + \frac{\omega_0^2}{6}\phi_0^3\cos^3\omega t$$

$\rightarrow \cos^3\omega t = \frac{3\cos\omega t + \cos 3\omega t}{4}$, $\ddot{\phi}^{(2)} + \omega_0^2\phi^{(2)} =: \tau$

$$\tau = \cancel{-2\omega_0^2\frac{\phi_0^2}{16_8}\cos\omega t + \frac{\omega_0^2}{6_2}\phi_0^3\frac{3\cos\omega t}{4}} + \frac{\omega_0^2}{24}\phi_0^3\cos 3\omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi}^{(2)} + \omega_0^2\phi^{(2)} = \underbrace{\frac{\omega_0^2}{24}\phi_0^3}_{A}\cos 3\omega t$$

(iv) $\phi_h^{(2)} = e^{\lambda t}$

$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + \omega_0^2 \cancel{e^{\lambda t}} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega_0$

$\phi_h^{(2)} = a_1 e^{i\omega_0 t} + a e^{-i\omega_0 t} = a_h \cos\omega t + b_h \sin\omega t$

$\phi_p^{(2)} = b_1 \cos 3\omega t + b_2 \sin 3\omega t$

$\ddot{\phi}_p^{(2)} = -9\omega^2 b_1 \cos 3\omega t - 9\omega^2 b_2 \sin 3\omega t$

⋮ siehe Blatt 12

$\Rightarrow$ Lsg: $b_1 = -\frac{\phi_0^3}{192}$, $b_2 = 0$

$a_h = \frac{\phi_0^3}{192}$, $b_h = 0$

$\Rightarrow \phi(t) = \underset{\phi^{(1)}}{\phi_0 \cos\omega t} + \frac{\phi_0^3}{192}(\underset{hom}{\cos\omega_0 t} - \underset{part}{\cos 3\omega t})$