**Universität Karlsruhe (TH)** **WS 2008/9**

# Klassische Theoretische Physik I

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

## Übungsblatt 4

Abgabe: Mo, 17.11.'08, 11.30 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

**Aufgabe 14: Integrale** **[4]**

Berechnen Sie die Integrale

(a) $\int_0^1 \left(x^3 + 3x - 1\right) \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$ , (b) $\int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x$ ,

(c) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ , (d) $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}\, \mathrm{d}x$ .

**Aufgabe 15: Wir planen eine Achterbahn** **$[3 \cdot 2 + 1 + 2 = 9]$**

Für den Bau einer Achterbahn steht eine Fläche von $x_{\text{tot}} = 20\,\text{m}$ Breite und $y_{\text{tot}} = 40\,\text{m}$ Länge zur Verfügung. Die Vorschriften erlauben eine Montage der Schienen bis zu $z_{\text{max}} = 10\,\text{m}$ Höhe. Der Antrieb der Achterbahn wird so gesteuert, dass sich folgende Bewegung ergibt:

Zu den Zeiten $t = 0$ und $t = T$ befinde befinde sich der Wagen in der Mitte des Grundstücks im Ursprung des Koordinatensystems und bewege sich mit der Geschwindigkeit $v_0$ in $x$–Richtung. Der Betrag der Beschleunigung $|\vec{a}| = a_0$ sei konstant. Während des ersten und letzten Viertels einer Fahrt der Periodendauer $T$ betrage die vertikale Komponente der Beschleunigung $a_v$ nach oben, dazwischen erfolge eine ebensolche Beschleunigung nach unten. Die Richtung des horizontalen Anteils $\vec{a}_h$ der Beschleunigung bilde mit der $y$–Achse in der ersten Hälfte der Periodendauer einen Winkel $\phi(t) = 4\pi t/T$. Die $x$–Komponente der Beschleunigung hat damit die Periode $T/2$ und sei negativ für $0 < t < T/4$. Zur Zeit $t = t' + T/2$ hat die $y$–Komponente das umgekehrte Vorzeichen wie zur Zeit $t'$.

(a) Geben Sie den Vektor der Beschleunigung $\vec{a}(t)$ an. Verwenden Sie $a_v, a_h$ und $\omega = 4\pi/T$ als Parameter.

(b) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ als Funktion der Zeit. Verwenden Sie $v_0$, $a_v$, $a_h$ und $\omega$ als Parameter.

(c) Geben Sie die Bahnkurve als Funktion der Zeit an. Verwenden Sie zunächst wieder $v_0$, $a_v$, $a_h$ und $\omega$ als Parameter.

(d) Nutzen Sie die Randbedingungen, die Gesamtfläche und die Vorschriften voll aus, um die Größen $v_0$, $a_v$ und $a_h$ durch $z_{\text{max}}$, $x_{\text{tot}}$ und $T$ bzw. $\omega$ auszudrücken.

(e) Skizzieren Sie die Achterbahn einmal in der Draufsicht ($x$–$y$–Ebene) und einmal in der Seitenansicht ($y$–$z$–Ebene).

*(b.w.)*

**Aufgabe 16: Partielle Ableitungen** **[$4 \cdot 0.5 = 2$]**

Gegeben ist die Funktion

$$F(\alpha, \lambda, \omega, t) = \alpha e^{-\lambda t} \sin \omega t \,.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda}\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial \omega}\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial t}\,.$$

**Aufgabe 17: Gradienten** **[5]**

Wir untersuchen zwei skalare Felder $A(\vec{r})$ und $B(\vec{r})$ mit ($\vec{r} = (x, y, z), r = |\vec{r}|$):

$$A(\vec{r}) = e^{-r^2}\,, \qquad B(\vec{r}) = \frac{x}{r^2 + a^2} \quad (a = \text{const})\,.$$

Berechnen Sie die Gradienten $\vec{\nabla} A(\vec{r})$ und $\vec{\nabla} B(\vec{r})$. Skizzieren sie das Feld $\vec{\nabla} A(\vec{r})$. $\vec{\nabla} B(\vec{r})$ kann als Summe $\alpha(\vec{r})\hat{x} + \beta(\vec{r})\hat{r}$ geschrieben werden. Skizzieren Sie die beiden Teilfelder. Skizzieren Sie alle Felder in der $x$–$y$–Ebene.