Klassische Theoretische Physik I

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 5

Abgabe: Mo, 24.11.'08, 11.30 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 18: Rotation und Divergenz **[$3+2=5$]**

(a) Zeigen Sie, dass für ein beliebiges skalares Feld $\phi(\vec{r})$ gilt,

$$\text{rot}\,(\text{grad}\,\phi(\vec{r})) = 0\,.$$

(b) Berechnen Sie für eine beliebige Funktion $f(r)$ mit $r = |\vec{r}|$ die Divergenz des Gradienten:

$$\text{div}\,(\text{grad}\,f(r))\;\;.$$

Aufgabe 19: Wegintegrale und Vektorfelder **[$2+4=6$]**

Gegeben sind die beiden Vektorfelder

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}\,, \qquad\qquad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\omega}\times\vec{r} \quad (\vec{\omega} = \text{const}).$$

(a) Berechnen Sie die Rotation der beiden Felder.

(b) Ein Wegintegral W des Vektorfeldes $\vec{V}$ entlang einer Kurve K sei definiert als

$$W = \int_K \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_K \vec{V}(\vec{r}(s))\cdot\hat{t}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dabei ist $\vec{r}(s)$ die natürliche Parametrisierung des Weges vom Anfangs– zum Endpunkt der Kurve K. $\hat{t}(s)$ ist der normierte Tangentenvektor entlang der Kurve an der Stelle $\vec{r}(s)$.

Berechnen Sie W mit $\vec{V} = \vec{A}$ und $\vec{V} = \vec{B}$ für zwei verschiedene Kurven K_1 und K_2 in der x–y–Ebene bei $z = 0$. Beide Kurven haben den Ursprung $(0,0,0)$ als Anfangspunkt A und den Endpunkt E bei $(1,0,0)$. K_1 ist die Strecke von A nach E; K_2 verläuft von A über $(0,1,0)$ und danach $(1,1,0)$ nach E.

Was beobachten Sie? Wie könnte ein Zusammenhang mit der Wirbelstärke aus (a) lauten?

(b.w.)

Aufgabe 20: Drehmatrizen **[$2+2+1=5$]**

(a) Wir untersuchen eine Matrix

$$D = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{6} \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass D eine Drehmatrix ist.

(b) Eine Drehung $D(\alpha, \beta)$ sei aus zwei aufeinanderfolgenden Drehungen zusammengesetzt: zunächst eine Drehung mit Winkel β um die z–Achse, dann eine Drehung mit Winkel α um die x–Achse. Berechnen Sie $D(\alpha, \beta)$.

(c) Ist die Matrix D aus (a) eine Matrix $D(\alpha, \beta)$ wie in (b)? Falls ja, bestimmen Sie α und β.

Aufgabe 21: Elliptische Zylinderkoordinaten **[4]**

Elliptische Zylinderkoordinaten sind definiert durch die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x &= \cosh u \cos v \ , \\ y &= \sinh u \sin v \ , \\ z &= z \ . \end{aligned}$$

Welche Form haben die Koordinatenlinien? Wie lauten die lokalen Basisvektoren? Handelt es sich um orthogonale krummlinige Koordinaten?