Universität Karlsruhe (TH) **WS 2008/9**

Klassische Theoretische Physik I

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 10

Abgabe: Mo, 12.1.'09, 11.30 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 38: Doppelte Nullstelle im charakteristischen Polynom [5]

Die gewöhnliche Differentialgleichung (DGL)

$$\dddot{x} - 2\beta\ddot{x} + \beta^2\dot{x} = 0$$

mit konstanten Koeffizienten β führt mit dem üblichen Exponentialansatz auf eine doppelte Nullestelle im charakteristischen Polynom. Bestimmen Sie die zwei gewöhnlichen Lösungen. Als DGL 3. Ordnung erwarten Sie jedoch ein Fundamentalsystem aus drei Lösungen. Bestimmen Sie die fehlende Lösung mit Hilfe des Ansatzes $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\phi(t)$, wobei λ die doppelte Nullstelle ist.

Aufgabe 39: Atwood–Maschinen [$2+1+1+3+1+2=10$]

Zwei Massen m_1 und m_2 sind über einen Faden der Länge l miteinander verbunden. Der Faden läuft über eine reibungslose Rolle, so dass die Massen auf beiden Seiten herabhängen. Der Faden und die Rolle seien masselos.

(a) Wie lauten die Bewegungsgleichungen für die beiden Massen?

(b) Bestimmen Sie die Beschleunigungen der beiden Massen.

(c) Wie groß ist die Fadenspannung und die Kraft auf die Aufhängung?

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse jeweils für Ihre Erwartung bei $m_1 = m_2$.
Die einfache Atwood–Maschine wird nun an einer Seite einer zweiten Atwood–Maschine befestigt. Auf der andere Seite haben wir eine Masse m_3.

(d) Bestimmen Sie die Beschleunigungen a_i der drei Massen. *Hinweis:* Machen Sie einen Ansatz mit der zunächst unbekannten Fadenkraft. Eine weitere Gleichung bekommen Sie aus einer Nebenbedingung, die durch das System vorgegeben ist.

(e) Schreiben Sie a_3 so, als handelte es sich um ein System mit nur zwei Massen, m_3 und einer Ersatzmasse M, die sich aus m_1 und m_2 bestimmt. Vergleichen Sie mit der Kraft auf die Aufhängung aus Teil (b).

(f) Wie müssen m_1 und m_2 gewählt werden, damit m_3 sich in Ruhe befindet?

(*Zusatzaufgabe ohne Wertung:*) Eine Atwood–Maschine mit den Massen m und M wird wieder an eine Seite einer zweiten Atwood–Maschine gehängt. Auf der anderen Seite der zweiten Maschine ist die Masse m befestigt. Diese wird nun an eine dritte Maschine mit der gleichen Masse m gehängt, etc. Es werden so insgesamt N Maschinen aneinander gekoppelt. Die letzte Atwood–Maschine wird einfach aufgehängt. Bestimmen Sie die Kraft auf die Aufhängung für $N \to \infty$. Welche Beschleunigung erfährt dann die oberste Masse m?

(b.w.)

Aufgabe 40: Trigonometrische Identitäten **[5]**

Zeigen Sie mit Hilfe der Exponentialdarstellung die folgenden trigonometrischen Identitäten:

(a) $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$,

(b) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$,

(c) $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$,

(d) $\sin^3 x = \frac{1}{4}\left(3\sin x - \sin 3x\right)$

(e) $\cos^3 x = \frac{1}{4}\left(3\cos x + \cos 3x\right)$

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!