Universität Karlsruhe (TH) **WS 2008/9**

Klassische Theoretische Physik I

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 10

Abgabe: Mo, 19.1.'09, 11.30 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 41: Geschwindigkeiten beim gedämpften Oszillator **[5]**

Ein harmonischer Oszillator mit Frequenz ω wird bei x_0 losgelassen und schwingt. Der gleiche Oszillator wird mit einer Flüssigkeit stark gedämpft (Dämpfungskonstante $\beta > \omega$). Wie gross sind die maximalen Geschwindigkeiten der beiden Oszillatoren? Bestimmen Sie das Verhältnis R der beiden maximalen Geschwindigkeiten vom gedämpften zum ungedämpften Fall. Wie lautet R im Fall $\beta \ll \omega$ ($\beta \neq 0$)?

Aufgabe 42: Schwingungsdauer des Fadenpendels **[$3+2+2=7$]**

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Schwingungsdauer τ des Fadenpendels der Länge l von der maximalen Auslenkung ϕ_0 abhängt. Mit der Schwingungsdauer $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ erhält man

$$\tau = \frac{2}{\pi} F\left(\sin\frac{\phi_0}{2}\right) T_0 \,.$$

Darin ist die spezielle Funktion

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$$

das vollständige elliptische Integral 1. Art. Wir wollen Korrekturen der Schwingungsdauer zu kleinen ϕ_0 berechnen. Das entspricht kleinen $k = \sin\frac{\phi_0}{2}$.

(a) Berechnen Sie die führenden Terme von $F(k)$ für kleine k^2 bis zur Ordnung k^4. Zeigen Sie, dass dann

$$F(k) \approx \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots\right] \,.$$

Entwickeln Sie dazu den Integranden in eine Taylorreihe in k^2 um $k^2 = 0$ und integrieren Sie Term für Term.

(b) Zeigen Sie mit dem Ergebnis aus (a), dass für kleine Auslenkungen die Schwingungsdauer

$$\tau = T_0\left(1 + \frac{1}{16}\phi_0^2 + \frac{11}{3072}\phi_0^4 + \cdots\right)$$

lautet.

(c) Das Fadenpendel diene uns als Uhr. Sei $\phi_0 = 0.2$ ($\approx 11.5^\circ$) und $T_0 = 1\,\mathrm{s}$. Die Uhr soll an einem Tag einen Gangunterschied von weniger als 1 s haben. Wie wenig darf das mittlere ϕ_0 dann nur von seinem Anfangswert abweichen? (Es genügt hier, die Korrekturen in ϕ_0^2 mitzunehmen!)

(b.w.)

Aufgabe 43: Inhomogene Differentialgleichung **[4]**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = t^2 + 3e^t \, .$$

Aufgabe 44: Exponentielle Kraft **[4]**

Ein Teilchen der Masse m erfährt die Kraft $F(t) = ma_0 e^{-\lambda t}$. Bei $t = 0$ ruht das Teilchen bei $x = 0$. Berechnen Sie $x(t)$.