1. Übung zur Vorlesung Theorie A **WS 2009/2010**
Karlsruhe Institute of Technology

Prof. Dr. Gerd Schön — Dr. G. Metalidis www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre

Abgabetermin: Mittwoch, 28.10.2009 vor 13.00 Uhr

Aufgabe 1

Gegeben seien die Vektoren $\vec{u}$ mit $\vec{u}^T = (2, 0, -1)$ und $\vec{v}$ mit $\vec{v}^T = (-1, 4, 7)$. Berechnen sie:

(a) $\vec{u} + \vec{v}$ und $|\vec{u} + \vec{v}|$ (1 Punkt)

(b) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ und den Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ (1 Punkt)

(c) $\vec{u} \times \vec{v}$ und $|\vec{u} \times \vec{v}|$ (1 Punkt)

Aufgabe 2

(a) Beweisen sie die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: (1 Punkt)

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

(b) Verwenden sie dieses Ergebnis um die Dreiecksungleichung (1 Punkt)

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

zu beweisen. (*Hinweis: Quadrieren sie die linke und rechte Seite dieser Gleichung*). Was ist die geometrische Interpretation dieser Ungleichung?

Aufgabe 3

Das Kronecker-Delta ist ein mathematisches Symbol, dass sehr oft im Zusammenhang mit Matrix- oder Vektoroperationen verwendet wird. Es ist definiert durch:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

Mit dem Kronecker-Delta kann man zum Beispiel das Skalarprodukt orthonormierter (d.h. orthogonaler und normierter) Vektoren $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ als

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

schreiben. Ein anderes wichtiges Symbol ist der Levi-Civita-Tensor ε_{ijk}. Er ist definiert durch:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i,j,k) = (1,2,3),\ (2,3,1) \text{ oder } (3,1,2) \text{ ist} \\ -1 & \text{wenn } (i,j,k) = (3,2,1),\ (2,1,3) \text{ oder } (1,3,2) \text{ ist} \\ 0 & \text{wenn irgend zwei Indizes gleich sind.} \end{cases}$$

Mann kann damit zum Beispiel die Kreuzprodukte der Basisvektoren $\hat{e}_i$ in der Form:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

schreiben.

(a) Zeigen sie, dass das Kreuzprodukt zusammengefasst werden kann als: (1 Punkt)

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} a_j b_k .$$

(b) Überzeugen sie sich von folgender Identität: (1 Punkt)

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$$

durch einsetzen einiger Indizes.

(c) Zeigen sie mit Hilfe der obigen Identität, dass für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ die "Bac-cab-Regel" gilt: (2 Punkte)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Aufgabe 4

Wie lauten die Stammfunktionen, d.h. die unbestimmten Integrale von:

(a) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$ (1 Punkt)

(b) $f(x) = \sin(ax)\mathrm{e}^{-x}$, (mittels 2-facher partieller Integration). (1 Punkt)