

Lösungsvorschlag 1. Übungsblatt Theorie A WS 2009/2010 Karlsruhe Institute of Technology

Prof. Dr. Gerd Schön — Dr. G. Metalidis

www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre

Aufgabe 1

$$(a) \quad \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{53}$$

$$(b) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 = -9$$
$$\cos \phi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-9}{(\sqrt{5} \sqrt{66})} \Rightarrow \phi = 2.089 \text{ rad}$$

$$(c) \quad (\vec{u} \times \vec{v})_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 = 0 + 4 = 4$$
$$(\vec{u} \times \vec{v})_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3 = 1 - 14 = -13$$
$$(\vec{u} \times \vec{v})_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1 = 8 - 0 = 8$$
$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ und } |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-13)^2 + 8^2} = \sqrt{249}$$

Aufgabe 2

$$(a) \quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\theta_{\vec{a}\vec{b}}) = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos(\theta_{\vec{a}\vec{b}})| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|, \quad \text{weil die cos-Funktion Werte zwischen } -1 \text{ und } 1 \text{ annimmt. } (\theta_{\vec{a}\vec{b}} \text{ ist der Winkel zwischen den Vektoren } \vec{a} \text{ und } \vec{b}).$$

$$(b) \quad \text{Linke Seite quadrieren: } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$
$$\text{Rechte Seite quadrieren: } (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| |\vec{b}|$$

Aus der vorigen Aufgabe haben wir $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\theta_{\vec{a}\vec{b}}) \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$, und daraus folgt:
 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 \leq (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$ was zum verlangten Ergebnis führt.

Geometrische Interpretation: In einem Dreieck ist die Länge einer Seite immer kleiner oder gleich der Summe der Längen der anderen zwei Seiten.

Aufgabe 3

$$(a) \quad \text{Zum Beispiel } \left(\vec{a} \times \vec{b} \right)_1 = \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

Alle andere Terme haben zwei gleiche Indizes und sind gleich Null. Die andere Komponenten kann man analog überprüfen.

(b) Einfach einsetzen...

(c)

$$\begin{aligned}\left[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})\right]_i &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} a_j (\vec{b} \times \vec{c})_k \\&= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} a_j \sum_{r,s} \varepsilon_{krs} b_r c_s \\&= \sum_{jk} \sum_{rs} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{krs} a_j b_r c_s \\&= \sum_{jk} \sum_{rs} \varepsilon_{kij} \varepsilon_{krs} a_j b_r c_s \\&= \sum_j \sum_{rs} (\delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}) a_j b_r c_s \\&= \sum_j \sum_{rs} \delta_{ir} \delta_{js} a_j b_r c_s - \sum_j \sum_{rs} \delta_{is} \delta_{jr} a_j b_r c_s \\&= \sum_j a_j b_i c_j - \sum_j a_j b_j c_i \\&= \left(\sum_j a_j c_j \right) b_i - \left(\sum_j a_j b_j \right) c_i \\&= b_i (\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_i (\vec{a} \cdot \vec{b})\end{aligned}$$

Das gilt für jedes beliebige Element i und damit ist die Identität bewiesen.

Aufgabe 4

(a) Substitution $u = x^4 + 1 \Rightarrow du = 4x^3 dx$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} dx = \int \frac{du}{4} \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{u}}{2} \Big|_{u=x^4+1} = \frac{\sqrt{x^4+1}}{2}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int dx \sin(ax) e^{-x} &= -\frac{1}{a} \cos(ax) e^{-x} - \int dx \frac{1}{a} \cos(ax) e^{-x} \\&= -\frac{1}{a} \cos(ax) e^{-x} - \frac{1}{a^2} \sin(ax) e^{-x} - \int dx \frac{1}{a^2} \sin(ax) e^{-x}\end{aligned}$$

Führt man die Terme mit $\int dx \sin(ax) e^{-x}$ zusammen, dann bekommt man:

$$\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \int dx \sin(ax) e^{-x} = -\frac{1}{a} \cos(ax) e^{-x} - \frac{1}{a^2} \sin(ax) e^{-x}$$

und damit:

$$\int dx \sin(ax) e^{-x} = -e^{-x} \frac{a \cos(ax) + \sin(ax)}{a^2 + 1}.$$