

Lösungsvorschlag 2. Übungsblatt Theorie A WS 2009/2010

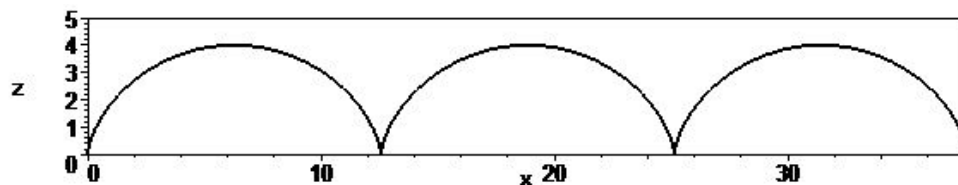
Karlsruhe Institute of Technology

Prof. Dr. Gerd Schön — Dr. G. Metalidis

www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre

Aufgabe 1

- (a) Für $r = 2$, findet man:



Im Allgemeinen hat die Zykloide die Periodenlänge $2r\pi$, und die Höhe $2r$.

- (b) Die Geschwindigkeit findet man durch ableiten der Bahnkurve:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = r[1 - \cos t] \hat{e}_x + r \sin t \hat{e}_z,$$

und ihr Betrag ist $|\vec{v}(t)| = \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} = r\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}$

- (c) Die Beschleunigung findet man durch ableiten der Geschwindigkeit:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = r \sin t \hat{e}_x + r \cos t \hat{e}_z,$$

und ihr Betrag ist $|\vec{a}(t)| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r$

Aufgabe 2

Die Beschleunigung ist gegeben durch $\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m} = \frac{A}{m} \sin(\omega t) \hat{e}_x$. Sowohl Kraft als auch Anfangsgeschwindigkeit haben nur eine x -Komponente, und deswegen haben Geschwindigkeit und Bahnkurve auch nur eine Komponente in x -Richtung.

- (a) Die Geschwindigkeit findet man durch Integration:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 + \int_0^t a_x(t') dt' \\ &= v_0 + \int_0^t \frac{A}{m} \sin(\omega t') dt' \\ &= v_0 + \frac{A}{m\omega} (1 - \cos(\omega t)) \end{aligned}$$

(b) Die Bahnkurve ist:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x(t=0) + \int_0^t v_x(t') dt' \\
 &= 0 + \int_0^t \left[v_0 + \frac{A}{m\omega} (1 - \cos(\omega t')) \right] dt' \\
 &= \left(v_0 + \frac{A}{m\omega} \right) t - \frac{A}{m\omega^2} \sin(\omega t).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Die Anfangsgeschwindigkeit ist:

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \theta \hat{e}_x + v_0 \sin \theta \hat{e}_z,$$

und man hat $a_x = 0$ und $a_z = -g$ gegeben.

(a) Da $a_x = 0$, ist $v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x dt' = v_0 \cos \theta$. Damit findet man:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0 + \int_0^t v_x dt' \\
 &= 0 + v_0 \cos \theta t = v_0 \cos \theta t
 \end{aligned} \tag{1}$$

In z -Richtung hat man $a_z = -g$, und daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 v_z(t) &= v_{0z} + \int_0^t a_z dt' \\
 &= v_0 \sin \theta - gt
 \end{aligned} \tag{2}$$

Nochmals integrieren liefert:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= z_0 + \int_0^t v_z(t') dt' \\
 &= h + v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Kombiniert man die Gleichungen (1) und (3), so findet man die Bahnkurve:

$$\begin{aligned}
 \vec{r}(t) &= x(t) \hat{e}_x + z(t) \hat{e}_z \\
 &= v_0 \cos \theta t \hat{e}_x + \left[h + v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \right] \hat{e}_z.
 \end{aligned} \tag{4}$$

(b) Aus der Gleichung (1) folgt: $t = \frac{x(t)}{v_0 \cos \theta}$. Setzt man das in der Gleichung (3) ein, so bekommt man:

$$z = h + x \tan \theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta}. \tag{5}$$

Das ist eine Parabelgleichung.

- (c) Der Zeitpunkt T an dem der Ball am Boden auftrifft kann man aus der Gleichung $z(T) = 0$ bestimmen:

$$z(T) = 0 \Leftrightarrow h + v_0 \sin \theta T - \frac{1}{2} g T^2 = 0.$$

Diese Gleichung zweites Grades hat die Lösungen:

$$T_{1,2} = \frac{v_0 \sin \theta \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}}{g},$$

wobei nur das Plus-Zeichen eine positive Zeit liefert.

- (d) Der Abstand R ist gegeben durch

$$R = x(T) = v_0 \cos \theta T = \frac{v_0 \cos \theta}{g} \left(v_0 \sin \theta + v_0 \sin \theta \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \theta}} \right).$$

Diese Gleichung kann man wie folgt umschreiben:

$$gR - v_0^2 \sin \theta \cos \theta = v_0^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \theta}}.$$

Das verlangte Ergebnis findet man, indem man diese Gleichung erst quadriert und dann durch $2gv_0^2 \cos^2 \theta$ teilt.

- (e) Für $h = 0$ findet man aus Aufgabe (d), dass $R = \frac{2v_0^2}{g} \cos^2 \theta \tan \theta = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)$. Man sieht also, dass R ein Maximum hat bei $\theta = \pi/4$.
- (f) Den Zeitpunkt, zu dem der Ball sein höchster Punkt erreicht, bestimmt man aus

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = 0 &\Leftrightarrow v_0 \sin \theta - gt = 0 \\ &\Leftrightarrow t_{max} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}. \end{aligned}$$

Die maximale Höhe findet man durch einsetzen dieser Zeit in die Gleichung (3):

$$z_{max} = z(t_{max}) = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$