Lösungsvorschlag 3. Übungsblatt Theorie A WS 2009/2010
Karlsruhe Institute of Technology

Prof. Dr. Gerd Schön — Dr. G. Metalidis www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre

Aufgabe 1

(a) $\frac{\mathrm{i}(1+3\mathrm{i})}{3-4\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}-3}{3-4\mathrm{i}} = \frac{(\mathrm{i}-3)(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})} = \frac{-13-9\mathrm{i}}{25}$

(b) $\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}^3} = \frac{1-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}} = \frac{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}}{-\mathrm{i}\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i}$

(c) $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} = 4\left(\cos(-\pi/6) + \mathrm{i}\sin(-\pi/6)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$

Aufgabe 2

(a) $z = \sqrt{3} + \mathrm{i} \Rightarrow \begin{cases} |z| & = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2 \\ \sin\phi & = \frac{1}{2},\ \text{und} \cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$

(b) $(-1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = -1 + \mathrm{i}^2 = -2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

Aufgabe 3

Wir schreiben $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, dann ist $z^* = |z|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}$, und damit $z \cdot z^* = |z|^2$. Das verwenden wir jetzt zweimal:

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(z_1 - z_2)^* + (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^* \\ &= |z_1|^2 - z_1 z_2^* - z_2 z_1^* + |z_2|^2 + |z_1|^2 + z_1 z_2^* + z_2 z_1^* + |z_2|^2 \\ &= 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) Die Lösungen sind durch $z = (-1+\mathrm{i})^{1/5}$ gegeben. Jetzt suchen wir zuerst die Polardarstellung von $z_0 = -1 + \mathrm{i}$:

$z_0 = -1+\mathrm{i} \Rightarrow \begin{cases} |z| & = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \sin\phi & = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \text{und} \cos\phi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow z_0 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n}$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

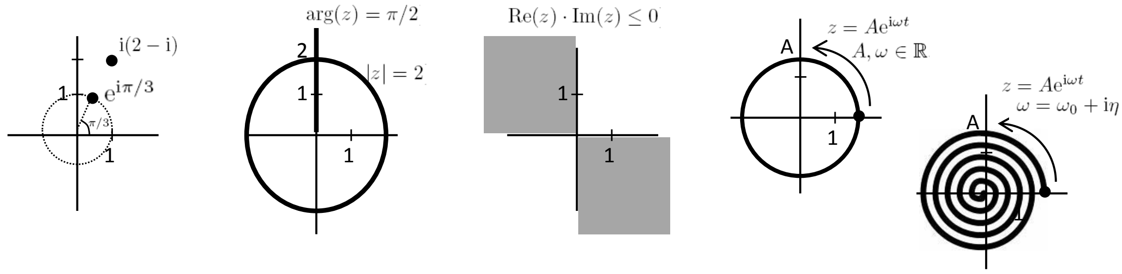
Damit ergibt sich $z_0^{1/5} = 2^{\frac{1}{10}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{20}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi n}{5}}$. Das ergibt also 5 unterschiedliche Lösungen, z.B. für $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

(b) Mit $|z|^2 = x^2 + y^2$ und $z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$ finden wir:

$$\begin{aligned} 2|z|^2 + z^2 = 1 &\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) + x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy = 1 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + y^2 + 2\mathrm{i}xy = 1 + 0\mathrm{i} \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + y^2 = 1, \text{und } 2xy = 0. \end{aligned}$$

Also muss entweder $x = 0$ und $y = \pm 1$ sein, oder $y = 0$ und $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Es gibt also 4 mögliche Lösungen: $\pm\mathrm{i}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Aufgabe 5


$\mathrm{i}(2-\mathrm{i})$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$
$\pi/3$
1
1
$\arg(z) = \pi/2$
2
1
$|z| = 2$
1
$\mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) \leq 0$
1
1
$z = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$
$A, \omega \in \mathbb{R}$
A
1
$z = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$
$\omega = \omega_0 + \mathrm{i}\eta$
A
1