4. Übung zur Vorlesung Theorie A — WS 2009/2010
Karlsruhe Institute of Technology

Prof. Dr. Gerd Schön — Dr. G. Metalidis www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre

Abgabetermin: Mittwoch, 18.11.2009 vor 13.00 Uhr.

Aufgabe 1: Schiefer Wurf mit Reibung I

Ein Ball wird mit Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{e}_x + v_{0z}\hat{e}_z$ von einem hohen Turm abgeworfen. Die z-Achse steht senkrecht auf der Erdoberfläche. Die Bewegung des Balls wird durch Reibung beeinflusst. Wir modellieren die Reibungskraft durch $\vec{F}_R = -\alpha\vec{v}$.

(a) Wie sieht die Bewegungsgleichung aus? Finden sie die Gleichungen für v_x und v_z durch Trennung der Bewegungsgleichung in x- und z-Komponenten. Wissen sie, ohne jetzt viel zu rechnen, wie die Lösung für v_x und v_z aussieht für lange Zeiten ($t \to \infty$)? (2 Punkte)

(b) Lösen sie jetzt die Bewegungsgleichung, und zeichnen sie v_x und v_z als Funktion der Zeit. Nehmen sie dabei an, dass für die Anfangsgeschwindigkeit $v_{0z} > 0$ gilt. (3 Punkte)

(c) Verwenden sie das Ergebnis der vorigen Aufgabe um die Bahnkurve $\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x + z(t)\hat{e}_z$ zu bestimmen. (2 Punkte)

(d) Wie groß ist die maximale Entfernung, die der Ball vom Turm aus erreichen kann (bei einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit)? (1 Punkt)

(e) Machen sie eine Reihenentwicklung der Exponentialfunktion, um zu sehen wie $z(t)$ für kleine t ($t \ll \alpha/m$) variiert. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Schiefer Wurf mit Reibung II

Wir betrachten das gleiche Problem wie oben, aber jetzt modellieren wir die Reibung durch $\vec{F}_R = -\beta|v|\vec{v}$, wobei $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$.

(a) Wie sehen jetzt die Bewegungsgleichung für v_x und v_z aus? Verstehen sie jetzt warum dieses Problem schwierig zu lösen ist (i.A. nur numerisch)? (1 Punkt)

(b) Deswegen betrachten wir ab jetzt nur noch den 1-dimensionalen Fall, mit $v_x(t) = 0$. Damit reduziert sich das Problem auf die Gleichung:

$$m\dot{v}_z = -mg - \beta|v_z|v_z$$

Wir machen auch noch die Annahme, dass $v_{0z} = 0$. Ohne diese Gleichung jetzt zu lösen, wie groß ist die erreichte Maximalgeschwindigkeit (für lange Zeiten)? Ist diese Geschwindigkeit positiv oder negativ? Was erhält man daraus für das Vorzeichen von $v_z(t)$? (1 Punkt)

(c) Lösen sie jetzt die Bewegungsgleichung durch Separation der Variablen. (3 Punkte)
Hinweis: Irgendwann sollte man dabei auf ein Integral der Form

$$\int_0^{v_z} \frac{\mathrm{d}v'_z}{v_e^2 - {v'}_z^2}$$

kommen, wobei $v_e = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}$ *der Absolutwert der Endgeschwindigkeit ist. In einer Integraltabelle findet man die Stammfunktion:*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$

(d) Zeigen sie, dass man $v_z(t)$ in der Form (1 Punkt)

$$v_z(t) = -v_e \tanh\left(\frac{gt}{v_e}\right)$$

schreiben kann, wobei $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$. Die Hyperbelfunktionen sind definiert durch $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(e) Bonusaufgabe: Bestimmen sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$. (1 Bonuspunkt)